Exercice 5 : ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = n$. On cherche, si elles existent, les matrices de carré égale à A.

① On suppose que A est diagonale et qu'il existe X telle que $X^2 = A$.

- **a.** Préciser la taille de X et montrer que $AX = XA$.
- **b.** Calculer les coefficients de AX et de XA et en déduire que X est une matrice diagonale.
- **c.** Conclure, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la forme et l'existence des matrices X possibles.

② A est cette fois non diagonale telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Déterminer les matrices B telles que $B^2 = A$.

③ *Application* : Déterminer les matrices de carré égale à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

① $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / X^2 = A$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ car $\text{Card}[\text{Sp}(A)] = n$.

a) On l'a déjà écrit (là ↑) : pour pouvoir calculer X^2, X doit être une matrice carrée et l'ordre de X^2 est égale à celui de A ; Donc $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Par ailleurs : $\underline{AX = X^2 \cdot X = X^3 = X \cdot X^2 = X \cdot A}$ □

b) Posons $AX = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $XA = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

on a : $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = a_{ii} x_{ij} = \lambda_i x_{ij}$

$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} = x_{ij} a_{jj} = \lambda_j x_{ij}$

$AX = XA \Rightarrow C_{ij} = d_{ij} \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \cdot x_{ij} = 0 \quad \forall i,j \in [\![1,n]\!]$

$\Rightarrow x_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ car dans ce cas $\lambda_i \neq \lambda_j$

conclusion $\underline{X \text{ est une matrice diagonale.}}$

c) l'équation $X^2 = A$ devient :

$X^2 = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{nn}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_{ii}^2 = \lambda_i \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$

$\Rightarrow x_{ii} = \pm\sqrt{\lambda_i}$ si $\lambda_i \geqslant 0$

conclusion si $\exists i \in [\![1,n]\!] / \lambda_i < 0$ alors AUCUNE matrice X telle que $X^2 = A$ dans $\mathbb{R}$

mais dans $\mathbb{C}$, $x_{ii} = \pm i\sqrt{-\lambda_i}$

ou encore :

- Si $\lambda_i \geqslant 0 \ \forall i \in [\![1,n]\!]$ alors 2^n matrices X possibles / $X^2 = A$ dans $\mathbb{R}$.
- Si $\exists i \in [\![1,n]\!] / \lambda_i < 0$ alors 2^n matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / X^2 = A$. et aucune dans $\mathbb{R}$...

⚠ Remarque l'hypothèse "$\text{Card}[\text{Sp}(A)] = n$" est essentiel pour cet exercice car, si ce n'est pas le cas, il se peut que $X^2 = A$ sans que X soit elle-même diagonale.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ vérifiant $X^2 = A$ ...

② $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non diagonale / $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.
on cherche B / $B^2 = A$.

→ On sait que card $[Sp(A)] = n$ donc A diagonalisable.
Donc : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P inversible / $A = PDP^{-1}$

→ On cherche $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ / $X^2 = D$: matrice diagonale formée des n vp distinctes de A, toutes positives
D'après ① : il existe 2^n matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ / $X^2 = D$.

→ On pose pour chacune d'entre elle :
$B = P.X.P^{-1}$ (il y a donc 2^n matrices B deux formées...)
Alors, $B^2 = (P.X.P^{-1}).(P.X.P^{-1})$
$= PX^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

③ Application

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Sp(A) = \{1, 3, 9\} \subset \mathbb{R}_+$ avec card $[Sp(A)] = 3 = \text{ordre}(A)$
donc A est diagonalisable.

. Recherche des ss. EV propres :

• $X \in E_1 \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 4x + 4y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -\frac{3}{2}y \end{cases}, \forall y \in \mathbb{R}$.
Soit $E_1 = Vect\{(4, 2, -3)\}$

• $X \in E_3 \Leftrightarrow (A - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -x = 0 \\ 4x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2}z, \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$
Soit $E_3 = Vect\{(0, -3, 2)\}$

• $E_9 = Vect\{(0, 0, 1)\}$ est immédiat grâce à la 3ème colonne de A...

D'où $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Un calcul rapide donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & -1/3 & 0 \\ 5/12 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$ → A faire !

Les matrices B telles que $B^2 = A$ sont les matrices :

$$B = P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$: il y en a $2^3 = 8$!...

Soit

$B_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$; $B_2 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B_3 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$; $B_4 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B_5 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$; $B_6 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $B_7 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$; $B_8 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 6 : **

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ canoniquement associée à $f \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$.

① Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice A.

② Soit g, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^3 + 2g = f$

a. Démontrer que $g \circ f = f \circ g$.

b. En déduire que tous les sous-espaces propres de f sont stables par g et que g est diagonalisable.

c. Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^3 + 2g = f$.

① λ vp de $A \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A-\lambda I) < 3 \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} < 3$

$\Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2-\lambda \\ 0 & -(\lambda+3) & \lambda+3 \\ 0 & 3\lambda-5 & 5-\lambda^2 \end{pmatrix} < 3$

(!) 1er cas : Si $\lambda = -3$: $\operatorname{rg}(A-\lambda I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -4 \end{pmatrix} = 2 < 3$

Donc $-3 \in Sp(A)$.

Sinon $(\lambda+3) \neq 0$: $\operatorname{rg}(A-\lambda I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2-\lambda \\ 0 & -(\lambda+3) & \lambda+3 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow (\lambda+3)L_3 + (3\lambda-5)L_2$

avec

$P(\lambda) = (\lambda+3)(5-\lambda^2) + (3\lambda-5)(3+\lambda)$

$= (\lambda+3)[5-\lambda^2+3\lambda-5] = (3+\lambda)(3\lambda-\lambda^2) = \lambda(3+\lambda)(3-\lambda) = 0$

si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 3$

Conclusion | $Sp(A) = \{-3, 0, 3\}$

On montre alors que $E_0 = \operatorname{Vect}\{u_1\}$ où $u_1 = (1,-1,-1)$

$E_3 = \operatorname{Vect}\{u_2\}$ où $u_2 = (2,1,1)$

$E_{-3} = \operatorname{Vect}\{u_3\}$ où $u_3 = (1,2,-7)$. (A faire)

② Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / g^3 + 2g = f$

a) $g \circ f = g \circ (g^3 + 2g) = g^4 + 2g^2 = (g^3 + 2g) \circ g = f \circ g$ □.

b) Montrons que $\forall \lambda \in Sp(A)$, $g(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Soit $u \in E_\lambda$ (càd $f(u) = \lambda u$) ; Pq : $g(u) \in E_\lambda$

càd Pq : $f[g(u)] = \lambda g(u)$.

or $f[g(u)] = f \circ g(u) = g \circ f(u) = g[\lambda u] = \lambda g(u)$ □.

Soit : $u_1 \in E_0$ donc $g(u_1) \in E_0 \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} / g(u_1) = a u_1$ puisque $\dim(E_0) = 1$.

$u_2 \in E_3 \Rightarrow g(u_2) \in E_3 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} / g(u_2) = b u_2$ car $\dim(E_3) = 1$.

$u_3 \in E_{-3} \Rightarrow g(u_3) \in E_{-3} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} (g(u_3) = c u_3$ car $\dim(E_{-3}) = 1$.

Concl : $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de vecteurs propres de f mais aussi de g ...

Donc il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de g : ce qui prouve que g est diagonalisable.

Soit $\Delta = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$ et $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

on a : $f = g^3 + 2g \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g^3) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(2g)$

$\Leftrightarrow D = \Delta^3 + 2\Delta$

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Dès lors :

$f = g^3 + 2g \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+2a & 0 & 0 \\ 0 & b^3+2b & 0 \\ 0 & 0 & c^3+2c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+2a = 0 \\ b^3+2b = 3 \\ c^3+2c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2+2) = 0 \\ b^3+2b-3 = 0 \\ c^3+2c+3 = 0. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2+2) = 0 \\ (b-1)(b^2+b+3) = 0 \\ (c+1)(c^2-c+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

Conclusion $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la seule matrice triangulaire telle que $\Delta^3 + 2\Delta = D$.

Soit $\Pi = P\Delta P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ est la seule matrice telle que :

$\Pi^3 + 2\Pi = A$.

(En effet $\Delta^3 + 2\Delta = D \Leftrightarrow P(\Delta^3 + 2\Delta)P^{-1} = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow P\Delta^3P^{-1} + 2P\Delta P^{-1} = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow \Pi^3 + 2\Pi = A.$)

On conclut : Il n'existe qu'un seul endomorphisme g tel que $g^3 + 2g = f$ et sa matrice dans la base canonique est Π.

Exercice 7 : ✶✶✶ Agro-Véto 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

① Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. A est-elle diagonalisable ?

② Déterminer une base $\mathcal{B}'_3$ de $\mathrm{Ker}(f-3id)^2$ et montrer que la juxtaposition d'une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(f-id)$ et de $\mathcal{B}'_3$ donne une base de $\mathbb{R}^3$.

③ En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

④ Calculer T^n pour n entier naturel non nul et en déduire A^n.

① λ vp de $A \Leftrightarrow rg(A-\lambda I) < 3 \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} < 3$

$\Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-(2-\lambda)^2 & 1-(2-\lambda) \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} < 3 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1)$

Donc $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow 3-\lambda = 0$ ou $1-(2-\lambda)^2 = [1-(2-\lambda)][1+(2-\lambda)]$
$= (\lambda-1)(3-\lambda) = 0$.

conclusion $\boxed{Sp(A) = \{1, 3\}}$.

Recherche des SEV propres : Soit U_λ la réduite de Gauss de $(A-\lambda I)$ obtenue précédemment.

• $X \in E_1 \Leftrightarrow (A-I)X = 0 \Leftrightarrow U_1 \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=-y \ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Soit $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0)\}$
$= \mathrm{Vect}\{u\}$ où $u = (1,-1,0)$.

• $X \in E_3 \Leftrightarrow (A-3I)X = 0 \Leftrightarrow U_3 \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=y \ \forall y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Soit $E_3 = \mathrm{Vect}\{v\}$ où $v = (1,1,0)$.

$\dim E_1 + \dim E_3 = 1+1 = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3)$: A n'EST PAS diagonalisable.

② $(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_3(f-3id)^2$

$rg[(A-3I)^2] = 1 \Rightarrow \dim[\mathrm{Ker}(f-3id)^2] = 3-1 = 2$ [F du rg]

Un regard rapide sur la matrice de $(A-3I)^2$ permet d'obtenir immédiatement 2 vecteurs de base de $\mathrm{Ker}(f-3id)^2$ à savoir e_1+e_2 [$C_1+C_2=0$ ...] et e_3 [$C_3=0$].

D'où $\mathrm{Ker}[(f-3id)^2] = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$
$= \mathrm{Vect}\{v, w\}$

Rq $v = (1,1,0) \in \mathrm{Ker}(f-3id) \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}[(f-3id)^2]$
(puisque $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, g^2 \ \forall g \in \mathcal{L}(E)$)
Il est donc normal de retrouver v dans E_3 et $\mathrm{Ker}[(f-3id)^2]$

Soit $B_1 = (u)$ où $u = (1,-1,0)$ une base de $E_1 = \ker(f - id)$

$B'_3 = (v,w)$ où $v = (1,1,0)$ et $w = (0,0,1)$ une base de $\ker[(f-3id)^2]$.

$B_1 \cup B'_3 = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car :

(*) Card $(u,v,w) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

(**) $\{u,v,w\}$ est libre car $\operatorname{rg}\{u,v,w\} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

Remarque (v,u,w), (w,u,v), etc sont également des bases de $\mathbb{R}^3$...

(3) On cherche une base $B'' = (u_1,u_2,u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ / $M_{B''}(f) = T$

A la lecture de T, on en déduit que :

$f(u_1) = 3u_1$; $f(u_2) = u_1 + 3u_2$; $f(u_3) = u_3$ [colonnes par colonnes].

$\Rightarrow u_1 \in E_3$: on prend $u_1 = v$

$u_3 \in E_1$: on prend $u_3 = u$

on cherche maintenant u_2 / $f(u_2) = v + 3u_2$

et $(f - 3id)(u_2) = v$

or $(f-3id)(w) = v$ puisque $(A - 3I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc w est le vecteur cherché.

Conclusion Si $B'' = (v,w,u)$ alors $M_{B''}(f) = T$.

et donc, $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) Une récurrence à écrire donne : $A^n = PT^nP^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Calculer T^n : on écrit $T = 3I + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on montre par récurrence que $B^k = (-2)^k J$ $\forall k \geq 1$

Dès lors, puisque $(3I).B = B(3I) = 3B$

$T^n = (B+3I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k 3^{n-k} = 3^nI + n3^{n-1}B + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} B^k 3^{n-k}$

$= 3^nI + n3^{n-1}B + \left[\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 3^{n-k}\right].J$

$= 3^nI + n3^{n-1} + (1^n - 3^n - 2n3^{n-1})J$

$= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n3^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 3^n + 2n3^{n-1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - CQFT.