14 T.D. Variables aléatoires réelles discrètes.

- Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
- Espérance. Propriétés. Théorème de transfert.
- Inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments, propriétés.
- Lois discrètes usuelles. Loi de Poisson. Espérance. Variance. Approximation d'une loi binomiale par une loi de poisson. Loi géométrique. Espérance et variance. Propriété d'invariance temporelle.
- Loi conjointe d'un couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes positives. Lois marginales, lois conditionnelles. Indépendance.
- Lois de $u(X, Y)$. Plus particulièrement loi de $max(X, Y)$, $min(X, Y)$ et $X + Y$.

Exercice 1 : ✶

Soit une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{a(k+1)}{k!} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

Déterminer a puis calculer $\mathbb{E}(X)$, si elle existe.

Exercice 2 : ✶

Trouver toutes les lois de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui forment des suites arithmético-géométriques.
C'est-à-dire, vérifiant :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / p_{n+1} = ap_n + b,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 3 : ✶✶

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

① Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{a}{k(k+1)} + \dfrac{b}{(k+1)(k+2)}$. En déduire la valeur de α.

② Montrer que $\mathbb{E}(X)$ existe et calculer sa valeur.

③ Déterminer la loi de $Z = X^2 - 4X + 4$

Exercice 4 : ✶✶ [Oral Agro-Véto 2005]

Soit un nombre réel $a \in]0, 1[$. Un joueur effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce. A chaque lancer, il obtient « pile » avec la probabilité a et « face » avec la probabilité $b = 1 - a$. S'il obtient « pile » il gagne un point et s'il obtient « face » il gagne deux points.
Pour tout nombre entier $n \geq 1$ donné, le joueur joue jusqu'à ce qu'il ait un total de points supérieur ou égal à n, et on note alors p_n la probabilité qu'il ait n points exactement.

① Calculer p_1 et p_2.

② Exprimer p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n.

③ En déduire une expression de p_n en fonction de a et de n.

④ Écrire une fonction Python `simuLancers(n,a)` qui permette de simuler cette expérience aléatoire ainsi qu'une fonction `estime_p(m,n,a)` qui permette de valider votre réponse à la question 3.

Exercice 5 ✶ :

On considère un élevage de phasmes constitué de 998 femelles et de 2 mâles.

① On effectue un prélèvement de dix individus de l'élevage (un à un sans remise). On note X la variable aléatoire égale au nombre de mâles obtenus. Donner sa loi et son espérance.

② Montrer que la loi de X peut être approchée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres, l'espérance et la variance.

③ On réitère l'expérience précédente en prélevant cette fois les individus un à un, avec remise, jusqu'à obtenir le premier mâle. On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre d'individus prélevés.

a. Déterminer la loi de Y_1 puis préciser son espérance et sa variance.
b. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et $Z_1 = \min(Y_1, m)$. Déterminer $\mathbb{E}(Z_1)$

④ Soit T, variable aléatoire égale au nombre de femelles qui ont précédé l'apparition du premier mâle. Déterminer la loi de T, son espérance et sa variance.

⑤ Dans les mêmes conditions qu'à la question 3., on note Y_2, variable aléatoire égale au rang d'apparition du second mâle.

a. Écrire une fonction Python permettant de modéliser cette expérience et estimer grâce à elle $\mathbb{E}(Y_2)$.
b. Justifier mathématiquement ce résultat.

Exercice 6 : ✶✶

Un mobile oscille entre deux positions A et B avec les règles suivantes :

- à l'instant 0, le mobile se trouve en A.
- si à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) le mobile est en A, alors il reste en A avec la probabilité $1/4$ et passe en B avec la probabilité $3/4$.
- si à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) le mobile est en B alors il reste en B avec la probabilité $1/3$ et passe en A avec la probabilité $2/3$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note a_n (resp. b_n) la probabilité que le mobile soit en A (resp. en B) à l'instant n.

① Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

② Écrire une fonction Python simulant la position du mobile au cours de n déplacements sous la forme d'une liste de 0 et de 1 selon qu'il est en A ou en B.
n étant fixé, écrire une fonction `estimePA(n)` permettant d'estimer la probabilité pour le mobile de se trouver en A à l'instant $t = n$. Pour n variant entre 1 et 100, relier les points de coordonnées $(n, \texttt{estimePA}(n))$.

③ **Argument mathématique** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

Il s'agit maintenant de déterminer l'expression de a_n et de b_n en fonction de n. On propose pour cela deux méthodes :

④ *Méthode 1* : Démontrer que la suite (a_n) est arithmético-géométrique puis exprimer a_n en fonction de l'entier naturel n.

⑤ *Méthode 2* : On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \cdot X_0$.
b. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5/12 \end{pmatrix}$. Montrer que A et D sont semblables.
c. En déduire l'expression de a_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 7 : ✶✶

Un poissonnier romain vient concurrencer Ordralfabétix dont la fraîcheur des produits est mise en doute. Les premiers jours, les villageois choisissent au hasard leur magasin. On suppose que que le nombre de clients qui chaque jour entre dans l'une ou l'autre des deux boutiques suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On appelle X le nombre de personnes allant chez Ordralfabétix et Y le nombre de ceux qui vont en face.

① Déterminer la loi de X et de Y.

② Énervé, Ordralfabétix distribue au hasard les bourre-pif à raison d'un client sur trois. Soit G et P, variables aléatoires respectivement égales au nombre de client qui reçoivent un coup et les autres. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

③ Les villageois, quant à eux, sont partagés. Certains parient qu'un nombre pair de coups sera distribué tandis que les autres parient qu'il sera impair. L'un des deux groupes a-t-il plus de chance de gagner ?

④ Les variables aléatoires X et G sont-elle indépendantes ? Si non, déterminer le coefficient de corrélation entre G et X.

Exercice 8 : ✶

On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $E = [\![1, n+1]\!]$. La loi du couple est donnée par :

$$\forall (i,j) \in E^2,\ \mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \lambda \cdot \binom{n}{i-1} \cdot \binom{n}{j-1}$$

① Déterminer λ.

② Déterminer la loi marginale de X. Calculer son espérance et sa variance ;

③ On considère la matrice M définie par $\forall (i,j) \in E^2$, $M_{i,j} = \mathbb{P}_{(Y=j)}(X=i)$.
M est-elle inversible ? Calculer M^2.

Exercice 9 : ✶

On considère la suite réelle $(p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie par : $p_{i,j} = \lambda \dfrac{a^{i+j}}{i!j!}$.

① Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que cette suite définisse une loi conjointe de probabilité.

② Soit (X,Y) couple de variable aléatoire discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi conjointe définie par les $p_{i,j}$.

a. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
b. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
c. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 10 : ✶

Soit X, variable aléatoire égale au résultat d'un tirage au hasard d'un entier sur $[\![1, n]\!]$. On effectue alors un tirage au hasard dans l'intervalle $[\![1, X]\!]$ dont le résultat se note Y. Déterminer les espérances de X et de Y.

Exercice 11 : ✶✶✶ D'après Oral Agro 2013

On effectue une succession de tirages avec remise dans deux urnes contenant chacune une proportion p de boules blanches jusqu'à obtenir, pour chacune, une première boule blanche.
Soit X et Y le nombre de tirages ayant amené une autre couleur que la couleur blanche, respectivement sur la première et la seconde urne.

① **a.** Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X+Y \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X-Y \leq 0)$.
b. Les événements $(X+Y \leq 0)$ et $(X-Y \leq 0)$ sont-ils indépendants ?
c. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(Y < X)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.

② Expliciter la loi de la variable aléatoire $D = X - Y$ et déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.

③ On pose $T = max(X,Y)$ et $U = min(X,Y)$.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X \geq k)$ et en déduire que U soit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
b. En déduire l'espérance et la variance de U ainsi que l'espérance de T.
c. Montrer que $(T=k) \cup (U=k) = (X=k) \cup (Y=k)$. En déduire que $\mathbb{P}(T=k) = 2\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(U=k)$.
d. On se place dans le cas où $p = 1/2 = q$. Démontrer l'existence et donner la valeur de $\mathbb{V}(T)$.