# Variables aléatoires discrètes et Algèbre linéaire

*Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème dont les deux parties sont complètement indépendantes. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer et, à titre indicatif, on pourra consacrer une heure à la première partie et une heure et demi à la suivante.*
*Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de* $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'**est** pas autorisé au cours de l'épreuve.*

### Exercice

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

① Montrer que $A$ est nilpotente ($\exists p \in \mathbb{N}^*/A^p = 0$)

② $A$ est-elle inversible ?

③ a) Trouver $u \in \mathbb{R}^3/f^2(u) \neq 0$.
b) Montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

④ Écrire la matrice $A'$ de $f$ dans cette nouvelle base.

## Problème :

Le but de ce problème est l'étude de deux modèles de propagation d'un virus.
Dans l'ensemble du problème, on considère une population $\mathcal{P}$ d'individus, chacun pouvant être porteur d'un virus $V$. Une unité de temps étant fixée (minute, heure, jour, selon la situation), on note $X_0$ la variable aléatoire égale au nombre d'individus de $\mathcal{P}$ porteurs de $V$ à l'instant initial de l'étude, et plus généralement $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre d'individus porteurs de $V$ au bout de $n$ unités de temps, $n$ étant un entier naturel.
La première partie étudie un modèle où $X_n$ est proportionnel à $X_{n-1}$ à chaque instant $n$. La seconde partie se penche sur un modèle où la dépendance de $X_{n+1}$ en fonction de $X_n$ est fournie par une matrice de transition

Dans tout ce problème, $\mathbb{E}(X)$ désigne, lorsqu'elle existe, l'espérance de la variable aléatoire $X$.

## Partie I : Évolution proportionnelle

Dans cette partie, on propose d'étudier une situation où, à un instant donné $n$, l'agent contaminant responsable de la transmission de $V$ peut être actif ou inactif (en raison de facteurs extérieurs qu'on ne cherche pas à étudier ici). A tout instant $n$, on a la probabilité $p$ qu'il soit actif, et la probabilité $1-p$ qu'il soit inactif, $p \in ]0,1[$ étant fixé.
On considère de ce fait une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre $p$, $U_n$ valant 1 si l'agent est actif à l'instant $n$ et 0 s'il est inactif. On supposera de plus que les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants et que $U_n$ est indépendant de $X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On convient que lorsque l'agent contaminant est actif à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'individus de $\mathcal{P}$ contaminé augmente d'un facteur $\alpha \in ]0,1[$ entre les instants $n$ et $n+1$, si bien que pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$U_n(\omega) = 1 \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1+\alpha)X_n(\omega)$$

De façon analogue, on conviendra que :

$$U_n(\omega) = 0 \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1-\alpha)X_n(\omega)$$

Ce modèle sera déclaré *raisonnable* si la suite $(X_n)$ reste bornée au sens suivant : L'événement

$$\mathcal{B} = \{\text{il existe un réel } B \text{tel que pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n \leq B\}$$

(on admet que c'en est bien un) soit quasi-certain (c'est-à-dire, ait une probabilité égale à 1).

① On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ dans toute cette question.

a) Établir que $X_n = (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}$ (✐ Ce résultat pourra être admis pour la suite).
b) Justifier le fait que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left((1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}\right) \cdot \mathbb{E}(X_{n-1})$
c) En déduire que : $\mathbb{E}(X_n) = (1+(2p-1)\alpha) \cdot \mathbb{E}(X_{n-1})$.
d) Donner l'espérance de $X_n$ en fonction de celle de $X_0$.
e) En supposant $\mathbb{E}(X_0) > 0$, pour quelles valeurs de $p$ a-t-on $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$ ?
Quelle contrainte en découle pour que le modèle soit jugé *raisonnable* ?

② Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

a) Quelle est la loi usuelle suivie par $S_n$ ?
b) Montrer que $X_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Quelle est, en fonction de $X_0$, la valeur maximale $M_n$ que peut prendre $X_n$ ?
d) Si $X_0 > 0$, montrer que $\underset{n\to\infty}{lim} M_n = +\infty$.

✐ ***Remarque :*** *Le résultat précédent semble empêcher la possibilité que le modèle proposé soit raisonnable. Néanmoins, ce maximum $M_n$ n'est atteint qu'au rang $n$ que si l'agent contaminant s'est montré actif lors des $n$ premiers instants. Si $p$ est faible et $n$ grand, cette probabilité devient infime.*

③ Fors de la remarque ci-dessus, nous cherchons dans la suite à quantifier de façon plus rigoureuse le risque que $X_n$ devienne très grand ,en évaluant la probabilité $\mathbb{P}(X_n > X_0)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On supposera cette fois encore que $X_0 > 0$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X_n > X_0) = \mathbb{P}(S_n > n\theta)$ où $\theta = -\dfrac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)}$.
En déduire que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-nt\theta}$$

✐ *Indication :* On pourra penser à utiliser l'inégalité de Markov (même si ce n'est pas la seule méthode possible).
b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé, déterminer $\mathbb{E}\left(e^{tU_k}\right)$.
c) En déduire que pour tout $t > 0$ :

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}$$

où $\phi(t) = \ln(pe^t + (1-p)) - t\theta$.
d) $\theta$ étant une fonction de $\alpha$, montrer que $\theta$ tend vers $l = 1/2$ lorsque $\alpha$ tend vers 0.

e) On admettra dans la suite que $\alpha$ est suffisamment proche de 0 pour qu'on puisse prendre $\theta = l$ pour valeur approchée. On suppose de plus que $p = \dfrac{1}{5}$. Montrer que $\phi$ atteint sur $\mathbb{R}_+^*$ un minimum $\lambda$ strictement négatif.

f) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(X_n > X_0)$ ? Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n > X_0)$ ?

✐ ***Remarque :*** *On peut démontrer (ce n'est pas demandé) que, dans ces conditions, l'événement $\mathcal{B}$ est de probabilité 1 ; le modèle sera considéré comme raisonnable pour les valeurs $p$ et $\alpha$ choisies précédemment.*

## Partie 2 : Évolution modélisée par une matrice de transition

***Remarque préliminaire :*** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq N\\ 0\leq j\leq N}}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{\substack{0\leq i\leq N\\ 0\leq j\leq N}}$ les coefficients de la matrice $A^n$ et on dit que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si, et seulement si, $b_{i,j} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{i,j}^{(n)}$ existe pour tout couple $(i,j)$. Dans ce cas, on note $B = (b_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq N\\ 0\leq j\leq N}} = \lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

On admettra par ailleurs les deux résultats suivants :

- Si $A$ et $A'$ sont deux matrices carrées et $P$ est une matrice carrée inversible de même taille telles que $A = PA'P^{-1}$, alors $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(A'^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A'^n\right)P^{-1}$.
- Si $A$ est une matrice carrée de taille $N+1$ telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $B$, $U_0$ un vecteur colonne à $N+1$ composantes, et si on note $U_n = A^n \cdot U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors les composantes de $U_n$ convergent vers celles de $B \cdot U_0$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

On suppose dans cette partie que la population $\mathcal{P}$ est de taille $N$. Le modèle suivant est fondé sur l'hypothèse d'un virus $V$ peu dangereux (la guérison est très rapide) mais très contagieux. On suppose que la propagation de $V$ suit le schéma suivant : si on admet qu'à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, on a $i$ individus porteurs de $V$ (c'est-à-dire $(X_n = i)$ est réalisé, avec $i \in [\![0, N]\!]$) et donc $N - i$ individus sains (c'est-à-dire non porteurs de $V$), alors :

- Chacun des $i$ porteurs devient sain à l'instant $n + 1$.
- Chacun des $N - i$ individus sains a une probabilité $p \in ]0, 1[$ (indépendante de $n$ et de $i$) de devenir porteur de $V$, de façon indépendante les uns des autres.

Pour $(i,j) \in [\![0, N]\!]^2$, on note $q_{i,j}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$ que $(X_{n+1} = i)$ soit réalisé sachant que $(X_n = j)$ l'est.

① On traite ici, afin de se faire une idée du modèle, le cas $N = 2$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et on note $M$ la matrice $M = (q_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq 2\\ 0\leq j\leq 2}}$.

✐ *Notez que $M$ et une matrice $3 \times 3$ dont les lignes et les colonnes sont numérotées de 0 à 2.*

a) Pour $j \in [\![0, N]\!]$, on cherche à reconnaître la loi conditionnelle de $X_{n+1}$ sachant l'événement $(X_n = j)$.
$N$ valant 2, trois cas de présentent : Montrer que la loi conditionnelle de $X_{n+1}$ sachant l'événement $(X_n = 0)$ est $\mathcal{B}(2, p)$, et étendre ce résultat à la loi conditionnelles de $X_{n+1}$ sachant l'événement $(X_n = 1)$ puis sachant l'événement $(X_n = 2)$. En déduire que :

$$M = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 1-p & 1 \\ 2p(1-p) & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $U_0$ et d'une puissance de la matrice $M$.

c) On rappelle que, si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\ker(A)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\ker(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / A \cdot X = 0 \right\}.$$

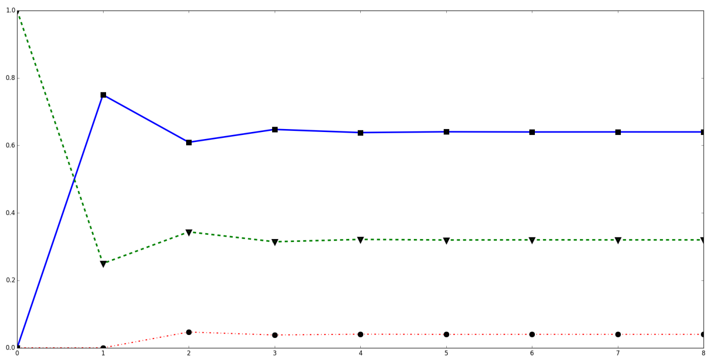
Montrer que $\ker(M - I_3)$, $\ker(M + pI_3)$ et $\ker(M - p^2 I_3)$ ne sont pas réduits au seul vecteur nul et déterminer une base de chacun d'entre eux de telles manière que la première coordonnée de chaque vecteur de base soit égale à 1.

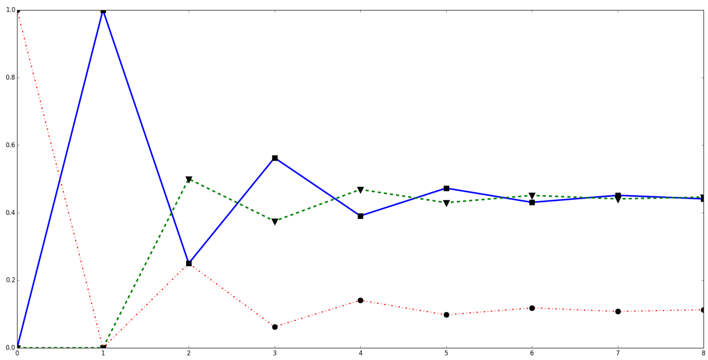
d) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$. En interprétant $M$ comme la matrice d'un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique, montrer que $M$ est semblable à $D$ et préciser $P$ telle que $M = PDP^{-1}$.

e) Calculer $P^2$ et déterminer $P^{-1}$.

f) Montrer que la suite de matrices $(D^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer $\underset{n \to \infty}{lim} D^n$.
En déduire que pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, $\underset{n \to \infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = k)$ existe et donner sa valeur.

g) Interpréter le résultat précédent en terme de propagation de virus.
Légender les deux figures ci-dessous en précisant dans chaque cas, le nombre de porteurs du virus initialement et en désignant les courbes représentant respectivement $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$.





② Dans le but de généraliser nos résultats à une valeur de $N$ quelconque ($N \in \mathbb{N}^*$), la notation $M$ est conservée pour désigner $(q_{i,j})_{\substack{0\leq i\leq N\\ 0\leq j\leq N}}$ tandis que $U_n$ désigne la matrice colonne de $N+1$ lignes formée des $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour $k \in [\![0, N]\!]$.

a) Donner une expression des coefficients de la matrice $M$ (à l'aide de coefficients binomiaux) et vérifier notamment que la somme des termes de chaque colonne vaut 1. Donner une relation entre $U_n$ et $U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On interprète désormais $M$ comme la matrice d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes $E = \mathbb{R}_N[X]$. On note $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base canonique de $E$ est $M$.
Montrer que $\varphi(X^k) = (pX + 1 - p)^{N-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

c) En remarquant que $\varphi(X^k) = \left(\dfrac{1}{pX+1-p}\right)^k \cdot (pX+1-p)^N$, $\forall k \in [\![0, N]\!]$, montrer que :

$$\forall Q \in E,\ \varphi(Q) = Q\left(\frac{1}{pX+1-p}\right)(pX+1-p)^N.$$

d) Soit $Q_k(X) = (X-1)^k(pX+1)^{N-k}$.

i. Montrer que $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, \cdots, Q_N)$ est une base de $E$.
ii. Déterminer $\varphi(Q_k)$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.
iii. En déduire que $M$ est semblable à une matrice diagonale $D$ qu'on déterminera (on ne demande pas d'expliciter $P$).

e) Montrer que les composantes de $U_n$ convergent également dans le cas général.