

**Variables aléatoires discrètes et algèbre  
linéaire**

**Problème :**

**Partie I : Évolution proportionnelle**

Dans cette partie, on propose d'étudier une situation où, à un instant donné  $n$ , l'agent contaminant responsable de la transmission de  $V$  peut être actif ou inactif. A tout instant  $n$ , on a la probabilité  $p$  qu'il soit actif, et la probabilité  $1 - p$  qu'il soit inactif,  $p \in ]0, 1[$  étant fixé.

On considère de ce fait une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ ,  $U_n$  valant 1 si l'agent est actif à l'instant  $n$  et 0 s'il est inactif. On supposera de plus que les  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont mutuellement indépendants et que  $U_n$  est indépendant de  $X_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On convient que lorsque l'agent contaminant est actif à l'instant  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre d'individus de  $\mathcal{P}$  contaminé augmente d'un facteur  $\alpha \in ]0, 1[$  entre les instants  $n$  et  $n + 1$  et que, s'il est inactif, ce nombre diminue d'un facteur  $\alpha$ , si bien que pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a :

$$\begin{cases} U_n(\omega) = 1 & \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1 + \alpha)X_n(\omega) \\ U_n(\omega) = 0 & \Rightarrow X_{n+1}(\omega) = (1 - \alpha)X_n(\omega) \end{cases}$$

① On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  dans toute cette question.

a) Établissons que  $X_n = (1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}$  ;

On note que  $\{U_{n-1} = 0\}, \{U_{n-1} = 1\}$  est un système complet d'événements.

- Si  $U_{n-1}(\omega) = 1$  alors  $1 - U_{n-1}(\omega) = 0$ .

Donc  $(1 + \alpha)^{U_{n-1}(\omega)}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}(\omega)}X_{n-1}(\omega) = (1 + \alpha)X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega)$

- Si  $U_{n-1}(\omega) = 0$  alors  $1 - U_{n-1}(\omega) = 1$ .

Donc  $(1 + \alpha)^{U_{n-1}(\omega)}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}(\omega)}X_{n-1}(\omega) = (1 - \alpha)X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega)$

Dès lors

$$\forall \omega \in \Omega, (1 + \alpha)^{U_{n-1}(\omega)}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}(\omega)}X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega)$$

**Conclusion :**  $(1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1} = X_n$

b) Justifions le fait que  $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}((1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}) \mathbb{E}(X_{n-1})$  :

Par hypothèse,  $U_n$  et  $X_n$  sont indépendantes pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc par application du lemme de coalition, on peut assurer que  $(1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}$  et  $X_{n-1}$  sont indépendantes pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Or, si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes,  $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .

**Conclusion :**  $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}((1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}) \cdot \mathbb{E}(X_{n-1})$

c) Déduisons-en que :  $\mathbb{E}(X_n) = (1 + (2p - 1)\alpha) \mathbb{E}(X_{n-1})$  :

Il suffit de déterminer  $\mathbb{E}((1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}})$  et pour ça nous appliquons le théorème de transfert avec, par définition :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((1 + \alpha)^{U_{n-1}}(1 - \alpha)^{1-U_{n-1}}) &= \sum_{k=0}^1 (1 - \alpha)^{1-k}(1 + \alpha)^k \mathbb{P}(U_{n-1} = k) \\ &= (1 - \alpha)\mathbb{P}(U_{n-1} = 0) + (1 + \alpha)\mathbb{P}(U_{n-1} = 1) \\ &= (1 - \alpha)(1 - p) + (1 + \alpha)p = 1 + (2p - 1)\alpha \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{E}(X_n) = (1 + (2p - 1)\alpha) \mathbb{E}(X_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) Donnons l'espérance de  $X_n$  en fonction de celle de  $X_0$  :

La suite  $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q = 1 + (2p - 1)\alpha$ .

**Conclusion** :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = (1 + (2p - 1)\alpha)^n \mathbb{E}(X_0)$

e) Si on suppose que  $\mathbb{E}(X_0) > 0$ , alors la suite  $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  si et seulement si

$q = 1 + (2p - 1)\alpha > 1 \Leftrightarrow (2p - 1)\alpha > 0 \Leftrightarrow 2p - 1 > 0$  (Noter que  $q < -1$  impossible)

**Conclusion** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$  si  $p > 1/2$

En conséquence, il faut supposer  $p \leq 1/2$  pour que le modèle puisse être jugé *raisonnable* mais ce n'est pas une condition suffisante et il faut regarder de plus près ce qui se passe sous cette condition.

② On pose  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$ .

a) Quelle est la loi de  $S_n$  ? C'est une question de cours.  $S_n$  est somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre  $p$ . Donc  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

b) Montrons que  $X_n = (1 + \alpha)^{S_n} (1 - \alpha)^{n - S_n} X_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  :

On raisonne par récurrence :

- Pour  $n = 1$ ,  $S_1 = U_0$  et, d'après la question 1.a) nous savons que :

$$X_1 = (1 + \alpha)^{U_0} (1 - \alpha)^{1 - U_0} X_0$$

Soit  $X_1 = (1 + \alpha)^{S_1} (1 - \alpha)^{1 - S_1} X_0$ . Ce qui assure l'initialisation de la récurrence.

- Supposons que  $X_{n-1} = (1 + \alpha)^{S_{n-1}} (1 - \alpha)^{n-1 - S_{n-1}} X_0$ , pour  $n \geq 2$ .

- Alors, toujours d'après la question 1.a) :

$$\begin{aligned} X_n &= (1 + \alpha)^{U_{n-1}} (1 - \alpha)^{1 - U_{n-1}} X_{n-1} \\ &= (1 + \alpha)^{U_{n-1}} (1 - \alpha)^{1 - U_{n-1}} \cdot (1 + \alpha)^{S_{n-1}} (1 - \alpha)^{n-1 - S_{n-1}} X_0 \\ &= (1 + \alpha)^{U_{n-1} + S_{n-1}} (1 - \alpha)^{1 - U_{n-1} + n-1 - S_{n-1}} X_0 \\ &= (1 + \alpha)^{S_n} (1 - \alpha)^{n - S_n} X_0 \text{ car } S_n = U_{n-1} + S_{n-1} \end{aligned}$$

- **Conclusion** :  $X_n = (1 + \alpha)^{S_n} (1 - \alpha)^{n - S_n} X_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Quelle est, en fonction de  $X_0$ , la valeur maximale  $M_n$  que peut prendre  $X_n$  ?

$n$  étant fixé ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), on note que  $(1 + \alpha)^{S_n} (1 - \alpha)^{n - S_n} = (1 - \alpha)^n \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^{S_n}$ .

Comme  $\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} > 1$ , la fonction  $t \mapsto \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^t$  est croissante.

$X_n$  prend donc sa valeur maximale pour la plus grande valeur possible prise par  $S_n$ .

Or  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  donc  $S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et par conséquent  $S_n \leq n$ .

$X_n$  prend donc sa valeur maximale pour  $S_n = n$  et vaut  $M_n = (1 + \alpha)^n (1 - \alpha)^{n - n} X_0$

**Conclusion** : La valeur maximale  $M_n$  que peut prendre  $X_n$  vaut :  $M_n = (1 + \alpha)^n X_0$ .

d) Il est immédiat que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^n = +\infty$  car  $1 + \alpha > 1$ .

Donc, si  $X_0 > 0$  (c'est-à-dire qu'il y a au moins un porteur de virus à l'instant initial de l'étude),

alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$ .

☞ **Remarque :** Le résultat précédent semble empêcher la possibilité que le modèle proposé soit raisonnable. Néanmoins, ce maximum  $M_n$  n'est atteint qu'au rang  $n$  que si l'agent contaminant s'est montré actif lors des  $n$  premiers instants (En effet,  $(S_n = n)$  est réalisé si, et seulement si  $(U_k = 1)$  est réalisé pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ).

Si  $p$  est faible et  $n$  grand, la probabilité d'avoir une telle séquence est infime.

- ③ Fors de la remarque ci-dessus, nous cherchons dans la suite à quantifier de façon plus rigoureuse le risque que  $X_n$  devienne très grand, en évaluant la probabilité  $\mathbb{P}(X_n > X_0)$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. On supposera cette fois encore que  $X_0 > 0$ .

a) Montrons que  $\mathbb{P}(X_n > X_0) = \mathbb{P}(S_n > n\theta)$  où  $\theta = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n > X_0) &= \mathbb{P}[(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}X_0 > X_0] \\ &= \mathbb{P}[(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} > 1] \text{ car } X_0 > 0 \\ &= \mathbb{P}(S_n \ln(1+\alpha) + (n-S_n) \ln(1-\alpha) > 0) \text{ car } t \mapsto \ln(t) \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \mathbb{P}((\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha))S_n > -n \ln(1-\alpha)) \text{ avec } \ln(1+\alpha) > \ln(1-\alpha) \\ &= \mathbb{P}(S_n > n\theta) \text{ où } \theta = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)} \end{aligned}$$

Déduisons-en que pour tout  $t > 0$ , on a :  $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-nt\theta}$

D'après ce qui précède, si  $t > 0$

$$\mathbb{P}(S_n > n\theta) = \mathbb{P}(tS_n > nt\theta) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{nt\theta})$$

Or, l'inégalité de Markov assure que pour toute variable aléatoire  $X$  admettant une espérance :

$$\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(X > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

Dès lors, en prenant ici  $\lambda = e^{nt\theta}$ , on obtient :

$$\mathbb{P}(S_n > n\theta) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{nt\theta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{nt\theta}}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-nt\theta}, \forall t > 0$

b) Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  fixé, déterminons  $\mathbb{E}(e^{tU_k})$  :

Comme  $U_k$  est une variable aléatoire discrète finie avec  $U_k(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  alors, d'après le théorème de transfert :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{E}(e^{tU_k}) = \sum_{i=0}^1 e^{ti} \mathbb{P}(U_k = i) = \mathbb{P}(U_k = 0) + e^t \mathbb{P}(U_k = 1) = (1-p) + pe^t$$

**Conclusion :**  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{E}(e^{tU_k}) = 1 - p + pe^t$

c) Déduisons-en que pour tout  $t > 0$  :  $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}$  où  $\phi(t) = \ln(pe^t + (1-p)) - t\theta$  :  
Toujours d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(e^{t\sum_{k=0}^{n-1} U_k}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\sum_{k=0}^{n-1} tU_k}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=0}^{n-1} e^{tU_k}\right)$$

Or les variables aléatoires  $U_k$  sont mutuellement indépendantes donc, d'après le lemme de coalition, les variables aléatoires  $e^{tU_k}$  sont indépendantes.

On rappelle alors que si  $V_1$  et  $V_2$  sont indépendantes,  $\mathbb{E}(V_1 \cdot V_2) = \mathbb{E}(V_1)\mathbb{E}(V_2)$ .

Ce résultat se généralise aisément par récurrence et permet d'écrire que si  $V_1, \dots, V_n$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes, alors :

$$\mathbb{E}(V_1 \cdot V_2 \cdots V_n) = \mathbb{E}(V_1)\mathbb{E}(V_2) \cdots \mathbb{E}(V_n).$$

Dès lors, en appliquant la question 3.b) :

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(e^{tU_k}) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - p + pe^t) = (pe^t + 1 - p)^n$$

On peut alors faire appel à la question 3.a) :

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq (pe^t + 1 - p)^n e^{-nt\theta} = e^{n \ln(pe^t + 1 - p) - nt\theta}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}$  où  $\phi(t) = \ln(pe^t + (1 - p)) - t\theta, \forall t > 0$

d) On cherche  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\ln(1 - \alpha)}{\ln(1 + \alpha) - \ln(1 - \alpha)}$ . Utilisons pour ça les développements limités à l'ordre 2 :

$$\ln(1 - \alpha) = -\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + o(\alpha^2) \text{ et } \ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + o(\alpha^2).$$

D'où  $\ln(1 + \alpha) - \ln(1 - \alpha) = 2\alpha + o(\alpha^2)$  et donc  $\theta(\alpha) = \frac{\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + o(\alpha^2)}{2\alpha + o(\alpha^2)}$ .

Soit  $\theta(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\alpha}{2} + o(\alpha))$ .

**Conclusion :**  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = \frac{1}{2} = l$

e) Conformément à l'énoncé, on admet dans la suite que  $\alpha$  est suffisamment proche de 0 pour qu'on puisse prendre  $\theta = 1/2$  pour valeur approchée. On suppose de plus que  $p = \frac{1}{5}$ .

Montrons que  $\phi$  atteint sur  $\mathbb{R}_+^*$  un minimum  $\lambda$  strictement négatif :

Nous avons donc  $\phi(t) = \ln\left(\frac{e^t}{5} + \frac{4}{5}\right) - \frac{t}{2}$ .

$\phi$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  par composition et somme de fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\forall t \geq 0, \phi'(t) = \frac{e^t}{e^t + 4} - \frac{1}{2}$ .

Donc  $\phi'(t) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{e^t}{e^t + 4} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^t \leq e^t + 4 \Leftrightarrow e^t \leq 4 \Leftrightarrow t \leq \ln(4)$ .

$\phi$  est donc décroissante sur  $[0, \ln(4)]$ , croissante sur  $[\ln(4), +\infty[$  et admet un minimum en  $x_0 = \ln(4)$  qui vaut

$$\lambda = \phi(\ln(4)) = \ln\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) - \frac{\ln(4)}{2} = \ln\left(\frac{8}{5}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

Or  $0 < \frac{4}{5} < 1$  donc  $-\infty < \ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$  car  $t \mapsto \ln(t)$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Conclusion :**  $\phi$  atteint sur  $\mathbb{R}_+^*$  un minimum  $\lambda = \ln(4/5)$  strictement négatif.

f) Que peut-on dire de  $\mathbb{P}(X_n > X_0)$  ?

D'après la question 3.c) nous savons que  $\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}, \forall t \in \mathbb{R}_+$ .

Donc, en particulier pour  $t = \ln(4)$  :

$$0 < \mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{\lambda n} = (e^\lambda)^n$$

Or  $\lambda < 0$  donc  $e^\lambda < 1$  et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^\lambda)^n = 0$ .

**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > X_0) = 0$  par théorème d'encadrement des limites.

Cette même inégalité permet de déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X_n > X_0)$  puisque  $\sum_{n \geq 0} (e^\lambda)^n$  est une série géométrique convergente. En effet, par application du théorème de convergence par comparaison de deux séries à termes positifs, on a :  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X_n > X_0)$  converge.

☞ **Remarque :** On peut démontrer (mais ce n'est pas demandé) que, dans ces conditions, l'événement  $\mathcal{B}$  est de probabilité 1 ; le modèle peut ainsi être considéré comme raisonnable pour les valeurs de  $p$  et de  $\alpha$  choisies précédemment.

## Partie 2 : Évolution modélisée par une matrice de transition

On suppose dans cette partie que la population  $\mathcal{P}$  est de taille  $N$ . Le modèle suivant est fondé sur l'hypothèse d'un virus  $V$  peu dangereux (la guérison est très rapide) mais très contagieux. On suppose que la propagation de  $V$  suit le schéma suivant : si on admet qu'à l'instant  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $i$  individus porteurs de  $V$  (c'est-à-dire  $(X_n = i)$  est réalisé, avec  $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ) et donc  $N - i$  individus sains (c'est-à-dire non porteurs de  $V$ ), alors :

- Chacun des  $i$  porteurs devient sain à l'instant  $n + 1$ .
- Chacun des  $N - i$  individus sains a une probabilité  $p \in ]0, 1[$  (indépendante de  $n$  et de  $i$ ) de devenir porteur de  $V$ , de façon indépendante les uns des autres.

Pour  $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$ , on note  $q_{i,j}$  la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$  que  $(X_{n+1} = i)$  soit réalisé sachant que  $(X_n = j)$  l'est et on note  $M$  la matrice  $M = (q_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 2}}$

① On traite ici, afin de se faire une idée du modèle, le cas  $N = 2$ .

a) Pour  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , on veut reconnaître la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant l'événement  $(X_n = j)$  :

Trois cas se présentent :

- Sachant  $(X_n = 0)$  réalisé,  $N = 2$  individus sont sains. La probabilité pour chacun d'entre eux de devenir porteur du virus valant  $p$ , la variable aléatoire  $X_{n+1}$  dénombre les nouveaux porteurs du virus comme autant de succès au cours de 2 épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ .

Autrement dit la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant l'événement  $(X_n = 0)$  est  $\mathcal{B}(2, p)$ .

Ou encore :

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = i) = \binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i}, \forall i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$$

- Sachant  $(X_n = 1)$  réalisé, il y a donc  $N - 1 = 1$  individu sain. Dès lors,  $X_{n+1}$  ne peut prendre que deux valeurs qui sont 0 et 1 où  $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = p$ , probabilité pour l'individu sain de devenir porteur du virus.

La loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant l'événement  $(X_n = 1)$  est  $\mathcal{B}(p)$

- Sachant  $(X_n = 2)$  réalisé, il n'y a donc aucun individu sain dans la population. la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant l'événement  $(X_n = 2)$  est la variable aléatoire certaine égale à 0.

D'après ce qui précède :

$$\begin{cases} q_{0,0} &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = \binom{2}{0} p^0(1-p)^2 = (1-p)^2 \\ q_{1,0} &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = \binom{2}{1} p^1(1-p)^1 = 2p(1-p) \\ q_{2,0} &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = \binom{2}{2} p^2(1-p)^0 = p^2 \end{cases}$$

De même :

$$\begin{cases} q_{0,1} &= \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = 1-p \\ q_{1,1} &= \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = p \\ q_{2,1} &= \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = 0 \end{cases}$$

et

$$q_{0,2} = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = 1; \quad q_{1,2} = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = 0 = q_{2,2} = \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)$$

**Conclusion :** 
$$M = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 1-p & 1 \\ 2p(1-p) & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrons que  $U_{n+1} = MU_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  
 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{(X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)\}$  est un système complet d'événements.  
 Dès lors, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=0) \cap (X_n=0)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=0) \cap (X_n=1)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=0) \cap (X_n=2)) \\ &= q_{0,0}\mathbb{P}(X_n=0) + q_{0,1}\mathbb{P}(X_n=1) + q_{0,2}\mathbb{P}(X_n=2) \\ &= (1-p)^2\mathbb{P}(X_n=0) + (1-p)\mathbb{P}(X_n=1) + \mathbb{P}(X_n=2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=1) \cap (X_n=0)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=1) \cap (X_n=1)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=1) \cap (X_n=2)) \\ &= q_{1,0}\mathbb{P}(X_n=0) + q_{1,1}\mathbb{P}(X_n=1) + q_{1,2}\mathbb{P}(X_n=2) \\ &= 2p(1-p)\mathbb{P}(X_n=0) + p\mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=2) \cap (X_n=0)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=2) \cap (X_n=1)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=2) \cap (X_n=2)) \\ &= q_{2,0}\mathbb{P}(X_n=0) + q_{2,1}\mathbb{P}(X_n=1) + q_{2,2}\mathbb{P}(X_n=2) \\ &= p^2\mathbb{P}(X_n=0) \end{aligned}$$

**Conclusion :** 
$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 1-p & 1 \\ 2p(1-p) & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=0) \\ \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \end{pmatrix}$$

On vient d'obtenir que (\*) :  $U_{n+1} = M \cdot U_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

On montre que  $U_n = M^n \cdot U_0, \forall n \in \mathbb{N}$ , par récurrence. Posons pour ça  $\mathcal{R}_n : U_n = M^n \cdot U_0$

- Pour  $n = 0$  :  $U_0 = M^0 \cdot U_0$  car  $M^0 = I_3$  donc  $\mathcal{R}_0$  est vraie.

et pour  $n = 1$ , d'après (\*), :  $U_1 = M \cdot U_0$  donc  $\mathcal{R}_1$  est vraie.

- Supposons que  $\mathcal{R}_n$  est vraie pour  $n$  fixé ( $n \in \mathbb{N}$ ).

- Alors, toujours d'après (\*) :  $U_{n+1} = M \cdot U_n$ .

Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure :

$$U_{n+1} = M \cdot (M^n \cdot U_0) = M^{n+1} \cdot U_0 \text{ par transitivité du produit matriciel.}$$

- **Conclusion :** 
$$U_n = M^n \cdot U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- c) Montrons que  $\ker(M - I_3)$ ,  $\ker(M + pI_3)$  et  $\ker(M - p^2I_3)$  ne sont pas réduits au seul vecteur nul et déterminons une base de chacun d'entre eux :

Soit  $E_1 = \ker(M - I_3)$  :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ((1-p)^2 - 1)x + (1-p)y + z = 0 \\ 2p(1-p)x + (p-1)y = 0 \\ p^2x - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(p-2)x + (1-p)y + z = 0 \\ y = 2px, \forall x \in \mathbb{R} \\ z = p^2x \end{cases}$$

**Conclusion :**  $\ker(M - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix} \right\}$ . On posera  $u_1 = (1, 2p, p^2)$ .

Soit  $E_{-p} = \ker(M + pI_3)$  :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-p} \Leftrightarrow (M + pI_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ((1-p)^2 + p)x + (1-p)y + z = 0 \\ 2p(1-p)x + 2py = 0 \\ p^2x + pz = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p^2 - p + 1)x + (1-p)y + z = 0 \\ y = (p-1)x, \forall x \in \mathbb{R} \\ z = -px \end{cases}$$

**Conclusion :**  $\ker(M + pI_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ p-1 \\ -p \end{pmatrix} \right\}$ . On posera  $u_2 = (1, p-1, -p)$ .

Soit  $E_{p^2} = \ker(M - p^2I_3)$  :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{p^2} \Leftrightarrow (M - p^2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ((1-p)^2 - p^2)x + (1-p)y + z = 0 \\ 2p(1-p)x + (p-p^2)y = 0 \\ p^2x - p^2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2p)x + (1-p)y + z = 0 \\ y = -2x, \forall x \in \mathbb{R} \\ z = x \end{cases}$$

**Conclusion :**  $\ker(M - p^2I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . On posera  $u_3 = (1, -2, 1)$ .

d) Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$ . En interprétant  $M$  comme la matrice d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$

dans la base canonique, on veut montrer que  $M$  est semblable à  $D$  en précisant  $P$  telle que  $M = PDP^{-1}$  :

D'après ce qui précède :

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_1) \in \ker(M - I_3)$  donc  $(f - id)(u_1) = 0 \Leftrightarrow f(u_1) = u_1$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_2) \in \ker(M + pI_3)$  donc  $(f + pid)(u_2) = 0 \Leftrightarrow f(u_2) = -pu_2$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_3) \in \ker(M - p^2I_3)$  donc  $(f - p^2id)(u_3) = 0 \Leftrightarrow f(u_3) = p^2u_3$

Il reste à montrer que  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  : On commence par noter que cette famille est de cardinal égale à trois, qui est la dimension de  $\mathbb{R}^3$  donc il suffit de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.

Nous choisissons pour ça de montrer que  $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 3$  en passant par la matrice  $Q$  des coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique :

$$\begin{aligned} \text{rg}(Q) &= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 2p & p-1 & -2 \\ p^2 & -p & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(1+p) & -2(1+p) \\ 0 & -p(1+p) & (1-p)(1+p) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2pL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - p^2L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & -p & 1-p \end{pmatrix} \text{ car } 1+p \neq 0 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+p \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + pL_2 \end{array} \\ &= 3 \text{ car } 1+p \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = \text{rg}(Q) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On vient de montrer que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = D$ . Donc  $M$  et  $D$  sont deux matrices semblables et il existe une matrice inversible  $P$  d'ordre 3 telle que  $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ .

$P$  est la matrice de passage de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}'$  et n'est rien d'autre que la matrice  $Q$ .

**Conclusion :** La matrice  $P$  telle que  $M = PDP^{-1}$  est :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2p & p-1 & -2 \\ p^2 & -p & 1 \end{pmatrix}$ .

e) Calculons  $P^2$  et déterminons  $P^{-1}$  : Un calcul immédiat donne :

$$P^2 = \begin{pmatrix} (p+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (p+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (p+1)^2 \end{pmatrix} = (p+1)^2 I_3$$

On a donc

$$P \cdot \frac{1}{(p+1)^2} P = I_3 = \frac{1}{(p+1)^2} P \cdot P$$

**Conclusion :**  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{(p+1)^2} P$ .

f) Montrons que la suite de matrices  $(D^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminons  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^n$  :

$$\text{On a } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix} \text{ donc, par récurrence, on a : } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-p)^n & 0 \\ 0 & 0 & p^{2n} \end{pmatrix}$$

Or  $0 < p < 1$  donc  $-1 < -p < 0$  et  $0 < p^2 < 1$ . En conséquence  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-p)^n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{2n}$ .

**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



On souhaite en déduire que pour tout  $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k)$  existe et donner sa valeur :  
 Pour répondre à cette question, on va utiliser les remarques préliminaires de la partie 2 :

- On rappelle que d'après 1.d) :  $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ , alors  $(M^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge puisque d'après la question précédente  $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M^n &= P \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} D^n) \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2p & p-1 & -2 \\ p^2 & -p & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+p)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+p)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2p & 2p & 2p \\ p^2 & p^2 & p^2 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

- d'après 1.b) :  $U_n = M^n U_0$  donc les composantes de  $U_n$  convergent vers celle de  $B \cdot U_0$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Soit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \mathbb{P}(X_0 = 2) \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+p)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix}$$

car  $\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$

**Conclusion :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{(1+p)^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2p}{(1+p)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{p^2}{(1+p)^2}$$

- g) *Interprétons le résultat précédent en terme de propagation de virus :*

On note que pour tout  $0 < p < 1$ ,  $0 < p^2 < 2p$ . En effet,

$$p^2 > 0 \quad \text{et} \quad 2p - p^2 = p(2-p) > 0$$

**Conclusion :** On en déduit que la propagation du virus tend vers un état stable tel que la probabilité de n'avoir plus aucun individu porteur de  $V$ , égale  $\frac{1}{(1+p)^2}$ , est supérieure à la probabilité d'avoir un individu porteur de  $V$ , elle même supérieure à la probabilité que toute la population soit porteur du virus.

On peut désormais légender les deux figures ci-dessous :

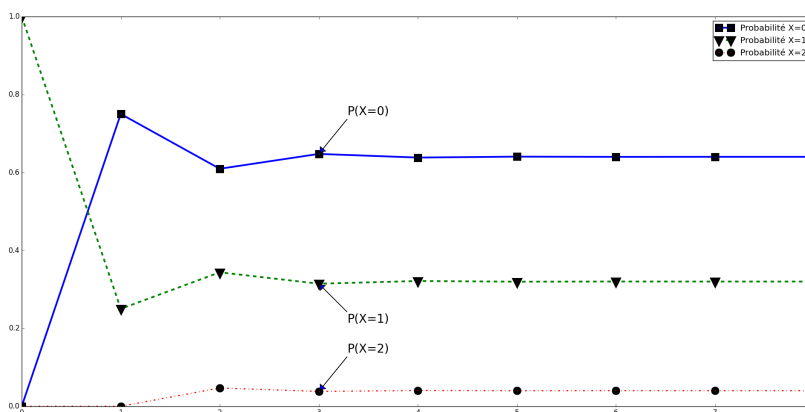


FIGURE 1 – Évolution des probabilités avec initialement 1 porteur du virus.

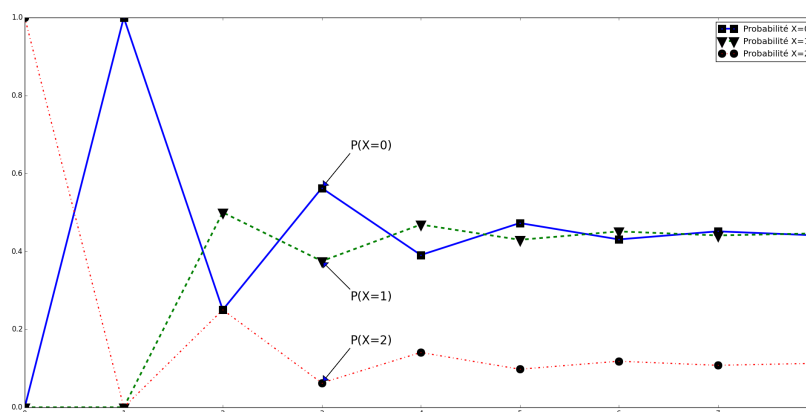


FIGURE 2 – Évolution des probabilités avec  $p = 1/2$  et initialement 2 porteurs du virus

☞ *Remarque* : On peut dans ce dernier cas obtenir  $p = 1/2$  car les probabilités d'avoir 1 seul individu et aucun individu porteur du virus convergent en l'infini vers la même valeur.

$$\text{Soit } \frac{1}{(1+p)^2} = \frac{2p}{(1+p)^2} \Leftrightarrow 1 = 2p \Leftrightarrow p = 1/2$$

② Dans le but de généraliser nos résultats à une valeur de  $N$  quelconque ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), la notation  $M$  est conservée pour désigner  $(q_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}}$  tandis que  $U_n$  désigne la matrice colonne de  $N + 1$  lignes formée des  $\mathbb{P}(X_n = k)$  pour  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

a) *Donnons une expression des coefficients de la matrice  $M$  (à l'aide de coefficients binomiaux) et vérifions que la somme des termes de chaque colonne vaut 1 :*

On rappelle que les coefficients de la matrice  $M$  sont notés  $q_{i,j}$  avec  $q_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_n=j)}(X_{n+1} = i)$ . Comme dans la question II.1.a), si l'événement  $(X_n = j)$  est réalisé, cela signifie qu'il y a exactement  $N - j$  individus sains à l'instant  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Dès lors, le nombre d'individus porteurs du virus à l'instant  $n+1$  est égale au nombre de personnes nouvellement infectées au cours de  $N - j$  épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$ , réel égale à la probabilité pour chaque personne de devenir porteur de  $V$ .

Autrement dit  $X_{n+1}$ , conditionnée par l'événement  $(X_n = j)$  suit une loi binomiale de paramètres  $N - j$  et  $p$ .

Dès lors

$$q_{i,j} = \binom{N-j}{i} p^i (1-p)^{N-j-i} \quad \text{SI } i < N-j$$

Par ailleurs, pour tout  $0 \leq j \leq N$ , on vérifie que la somme des termes de la  $j$ -ième colonne de la matrice  $M$  vaut :

$$\sum_{i=0}^N q_{i,j} = \sum_{i=0}^{N-j} \binom{N-j}{i} p^i (1-p)^{N-j-i} = (p + 1 - p)^{N-j} = 1$$

par application de la formule du binôme de Newton.

b) On interprète désormais  $M$  comme la matrice d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes  $E = \mathbb{R}_N[X]$ . On note  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base canonique

de  $E$  est  $M$ .

Montrons que  $\varphi(X^k) = (pX + 1 - p)^{N-k}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$  :

Il suffit pour ça de lire la  $k$ -ième colonne de la matrice  $M$  :

$$\begin{aligned}\varphi(X^k) &= (q_{0,k}, q_{1,k}, \dots, q_{N,k})_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^{N-k} q_{i,k} X^i \text{ car } q_{i,k} = 0 \text{ si } i > N - k \\ &= \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} (pX)^i (1-p)^{N-k-i} = (pX + 1 - p)^{N-k}\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\varphi(X^k) = (pX + 1 - p)^{N-k}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$

c) On remarque effectivement que  $\varphi(X^k) = \left(\frac{1}{pX + 1 - p}\right)^k \cdot (pX + 1 - p)^N$ ,  $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

Montrons que :  $\forall Q \in E$ ,  $\varphi(Q) = Q \left(\frac{1}{pX + 1 - p}\right) (pX + 1 - p)^N$  :

Pour ça posons :  $Q(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ .

Par linéarité de  $\varphi$ , on a immédiatement :  $\varphi(Q) = \sum_{k=0}^N a_k \varphi(X^k)$

Soit

$$\varphi(Q) = \sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{1}{pX + 1 - p}\right)^k \cdot (pX + 1 - p)^N = (pX + 1 - p)^N \sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{1}{pX + 1 - p}\right)^k$$

**Conclusion :**  $\forall Q \in E$ ,  $\varphi(Q) = Q \left(\frac{1}{pX + 1 - p}\right) (pX + 1 - p)^N$

d) Soit  $Q_k(X) = (X - 1)^k (pX + 1)^{N-k}$ .

i. Montrons que  $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_N)$  est une base de  $E$  :

Cette famille est de cardinal égale à  $N + 1$  qui est la dimension de  $E = \mathbb{R}_N[X]$ .

Il est donc suffisant de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base de  $E$ ...

On commence par noter que tous les polynômes  $Q_k$  sont de même degré égale à  $N$  dont il est illusoire d'utiliser l'échelonnement en degré.

Menons plutôt une démonstration par l'absurde...

Supposons que  $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{(0, \dots, 0)\} / \sum_{k=0}^N \lambda_k Q_k = 0$  (\*)

On pose  $r = \min\{i \in \llbracket 0, N \rrbracket / \lambda_i \neq 0\}$ . Alors :

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{k=r}^N \lambda_k Q_k = 0 \Leftrightarrow (X - 1)^r \sum_{k=r}^N \lambda_k (X - 1)^{k-r} (pX + 1)^{N-k} = 0$$

Or le polynôme  $(X - 1)^r$  est non nul donc

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_r (pX + 1)^{N-r} + \lambda_{r+1} (X - 1) (pX + 1)^{N-r-1} + \dots + \lambda_N (X - 1)^{N-r} = 0$$

En particulier pour  $x = 1$ , on obtient  $\lambda_r(p+1)^{N-r} = 0$  et donc  $\lambda_r = 0$ .  
Ce qui est absurde au regard de la définition de  $\lambda_r$ .

On en déduit que la famille  $(Q_0, \dots, Q_N)$  est libre.

**Conclusion :**  $\mathcal{B}' = (Q_0, \dots, Q_N)$  est une base de  $E$ .

ii. Déterminons  $\varphi(Q_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$  :

On utilise le résultat de la question 2.c) :

$$\begin{aligned} \varphi(Q_k) &= Q_k \left( \frac{1}{pX+1-p} \right) (pX+1-p)^N \\ &= \left( \frac{1}{pX+1-p} - 1 \right)^k \left( \frac{p}{pX+1-p} + 1 \right)^{N-k} (pX+1-p)^N \\ &= \frac{(-pX+p)^k (pX+1)^{N-k}}{(pX+1-p)^k (pX+1-p)^{N-k}} (pX+1-p)^N \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\varphi(Q_k) = (-p)^k Q_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$

iii. On souhaite en déduire que  $M$  est semblable à une matrice diagonale  $D$  qu'on déterminera sans pour autant expliciter  $P$  :

Il suffit d'écrire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . D'après la question qui précède :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & (-p)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-p)^N \end{pmatrix}$$

**Conclusion :**  $M$  est semblable à la matrice  $D$ . Il existe  $P$  inversible telle que  $M = PDP^{-1}$ .

e) Montrons que les composantes de  $U_n$  convergent également dans le cas général :

On utilise ici encore les remarques préliminaires de la partie 2 :

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^n$  existe et vaut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (-p)^n & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & (-p)^{2n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-p)^{nN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = D_1$$

car  $-1 < -p < 0$

alors  $(M^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $B = P \cdot D_1 \cdot P^{-1}$ .

- Or  $U_n = M^n U_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$  existe et vaut  $B \cdot U_0$  où  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ .

**Conclusion :** Chacune des composantes de  $U_n$  convergent lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Annexe** : Recherche des noyaux par utilisation du pivot de Gauss :

Soit  $E_1 = \ker(M - I_3)$  :

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\Leftrightarrow (M - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 - 1 & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & p-1 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} p(p-2) & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & p-1 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2p^2 - 2p & 1-p & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & \boxed{p-1} & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p-1 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2p(1-p)x + (p-1)y = 0 \\ p^2x - z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px - y = 0 \\ p^2x - z = 0 \end{cases} \text{ car } p-1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2px \\ z = p^2x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Conclusion** :  $\ker(M - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ p^2 \end{pmatrix} \right\}$ . On posera  $u_1 = (1, 2p, p^2)$ .

Soit  $E_{-p} = \ker(M + pI_3)$  :

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-p} &\Leftrightarrow (M + pI_3)X = 0 \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 + p & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & 2p & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & \boxed{p} & 0 \end{array} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} p(1-p)^2 & p-p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & 2p & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & p & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow pL_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 & 1-p & 0 & 0 \\ (1-p) & \boxed{1} & 0 & 0 \\ p & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ car } p \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - (1-p)L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-p)x + y = 0 \\ px + z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = (p-1)x \\ z = -px \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Conclusion** :  $\ker(M + pI_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ p-1 \\ -p \end{pmatrix} \right\}$ . On posera  $u_2 = (1, p-1, -p)$ .

Soit  $E_{p^2} = \ker(M - p^2 I_3)$  :

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{p^2} &\Leftrightarrow (M - p^2 I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} (1-p)^2 - p^2 & 1-p & \boxed{1} & 0 \\ 2p(1-p) & p-p^2 & 0 & 0 \\ p^2 & 0 & -p^2 & 0 \end{array} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1-2p & 1-p & 1 & 0 \\ 2p(1-p) & p(1-p) & 0 & 0 \\ p^2(2-2p) & p^2(1-p) & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + p^2 L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1-2p & 1-p & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ car } p \neq 0 \text{ et } 1-p \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2p)x + (1-p)y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = (2p-1)x + 2(1-p)x = x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\ker(M - p^2 I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . On posera  $u_3 = (1, -2, 1)$ .