COLLE SEMAINE 21 - SUJET 1 -

Cours :

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, \cdots, U_n$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'urne U_j contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j.
On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :
– Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne U_n.
– A l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in [\![0, n]\!]$), le second tirage s'effectue dans U_j.
– On continue alors les tirages selon la même règle pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j.
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n, on pose $X_0 = n$.
$\forall k \in \mathbb{N}$, on considère la matrice W_k dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 0) \\ \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_k = n) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

① a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Déduire du résultat précédent que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
c) En utilisant la fonction `linalg.eig` de `numpy`, déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A.

② Écrire une fonction qui prend en paramètres deux entiers k et n et renvoie une liste contenant le résultat de k tirages. Tester plusieurs fois avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 50$.

③ a) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, écrire $\mathbb{P}(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $\mathbb{P}(X_k = i)$ pour i dans $[\![0, n]\!]$.
b) En déduire la relation $W_{k+1} = AW_k$ puis une expression de W_k en fonction de A et de W_0.
c) Écrire une fonction en Python qui prend en paramètres deux entiers k et n, engendre le vecteur W_0 et renvoie le vecteur W_k (en utilisant `matriceA(n)`). Tester le programme avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 20$.

④ a) Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = \mathbb{E}(X_k)$.
b) Calculer le produit BA en fonction de B.
c) Pour tout entier naturel k, exprimer $\mathbb{E}(X_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
d) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de k et de n. Vérifier son adéquation avec les résultats empiriques obtenus précédemment.