# COLLE SEMAINE 21 - SUJET 10 -

**Cours :** Si $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_q)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^n$ et si $p$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $F$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} (u_i|x)u_i$.

## Exercice :

On considère $E$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre et l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. À l'aide d'un programme Python, déterminer la plus petite valeur propre parmi les matrices de $F$ dont les cœfficients sont égaux à 0 ou 1.
   *On pourra par exemple utiliser la fonction* `numpy.linalg.eig`*, comme le montre l'exemple suivant :*
   ```
   import numpy.linalg as la
   vap,vep = la.eig ( [ [1 ,2 ], [3 ,4]] )
   ```
   Après cette suite d'instructions, la variable `vap` contient la liste des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et la variable `vep` est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.
2. a) Montrer que $E$ et $F$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Donner une base de $E \cap F$.
3. a) Montrer que $A \in E \cap F$.
   b) Montrer que $A$ est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et déterminer une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale vérifiant $A = PD{}^tP$ où ${}^tP$ est la matrice transposée de $P$.
4. Vérifier que ${}^tPMP$ est diagonale pour toute matrice $M$ de $E \cap F$.
5. Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$.