10 T.D. Révisions d'intégration.

Intégration : Intégrale d'une fonction continue f sur un segment (l'existence de primitives pour une fonction continue sur un segment est admise). Lien avec la notion d'aire pour une fonction continue positive.
Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.
Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.
Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
Compléments : Sommes de Riemann sur $[0,1]$: $\int_0^1 f(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.
Intégrations par parties. Changements de variables (✐ « Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'un intégration par parties ou d'un changement de variable sera indiquée »).

Exercice 1 ✶ : Calculer les intégrales usuelles suivantes :

$$a)I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx; \quad b)I = \int_0^{\pi/6} sin(3x)dx; \quad c) \int_0^x \sqrt{2t+1}dt; \quad d)I = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}dx$$

$$e)I = \int_1^x \left(t^2 + \sqrt{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt; \quad f)I = \int \sin^3(x)dx; \quad g)I = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx; \quad h)I = \int_1^2 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$$

$$i)I = \int \frac{dx}{x^2+4}; \quad j)I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}; \quad k)I = \int te^{-t^2/2}dt; \quad l)I = \int_0^{\pi/4} (2 + 2tan^2 x)dx$$

Exercice 2 ✶ : Intégration par parties et changements de variables

$$a)I = \int_0^1 \arctan(t)dt; \quad b)I = \int t^2 e^{-t^2/2}dt; \quad c)I = \int t^2 e^{-2t}dt; \quad d)I = \int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$$

$$e)I = \int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}(\text{ avec } u = \sqrt{x-1}); \quad f)I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx(\text{ avec } x = \cos u); \quad g)I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx;$$

avec, pour g), les changements de variables successifs : $x = \sin u$ et $v = \tan u$.

Exercice 3 : Intégrales et relations de récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt$.

① Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire sa nature.

② Établir une relation entre u_n et u_{n+1}.

③ Calculer u_0. En déduire une expression de u_n.

④ En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 4 : fonctions définies par une intégrale

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$g(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \text{ et } \forall x \neq 0,\ f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

① Étudier la parité de f.

② Montrer que g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner une expression de sa dérivée.

③ Donner une relation simple entre f et g. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$.

④ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que f admet une limite en $+\infty$.

⑤ Appliquer le théorème des accroissements finis pour obtenir un majoration de $|\cos t - 1|$.
En déduire la limite en 0 de h définie par $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Conclure sur le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice 5 : sommes de Riemann

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}$, $\forall n \geq 1$.

① Montrer que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I$ où I est l'intégrale sur l'intervalle $[0,1]$ d'une fonction f qu'on précisera.

② Déterminer I grâce au changement de variable $t = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

③ En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. En faire la vérification grâce à une fonction Python.

1 Calcul différentiel

Exercice 1 ✶ : Equations différentielles du premier ordre

Résoudre les ED suivantes d'inconnue $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ supposée dérivable.

① $y' - xy = x$, $I = \mathbb{R}$

② $y' - 2y = 8x^2 - 8x$, $I = \mathbb{R}$

③ $y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x$, $I = \mathbb{R}$.
✐ On cherchera une solution particulière de la forme : $y : x \longmapsto ae^x + b\cos x + c\sin x$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

④ $y' - 2y = \dfrac{-2}{1 + e^{-2x}}$, $I = \mathbb{R}$

⑤ $xy' - y + \ln x = 0$, $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2 ✶ : Equations différentielles du second ordre

Résoudre les ED suivantes d'inconnue $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable.

① $y'' + y = e^x$

② $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x$
✐ On cherchera une solution particulière de la forme $y : x \longmapsto a\sin x + b\cos x$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

③ $y'' - 3y' + 2y = xe^x$. ✐ On cherchera une solution particulière de la forme : $(ax^2 + bx + c)e^x$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

④ $y'' - 3y' + 2y = xe^{-2x}$. ✐ On cherchera une solution particulière de la forme : $(\alpha x + \beta)e^x$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

⑤ $y'' - 3y' + 2y = x(e^x + e^{-2x})$

2 Problème de synthèse

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x).$$

On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t \varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

① Montrer que G et F sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

② **a.** Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 : $F(x) = \varphi(0) + \dfrac{x}{2}\varphi'(0) + o(x)$.
b. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

③ Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $(\mathcal{E}_0) \qquad (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = 0$.

④ Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

⑤ **a.** Exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.

⑥ La fonction F est-elle une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$?

⑦ On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi(x) \leq F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x = 0$? En déduire que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.