CORRECTION D.S.05
Analyse et algèbre

Exercice :

① *Démontrons que F_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :*
Nous le démontrons par caractérisation des sous-espaces vectoriels mais il est plus rapide de mettre en évidence F_1 comme un sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs de E et pour ça d'anticiper sur la question 2...

- $F_1 \subset E$ par définition de F_1.
- La fonction nulle est élément de F_1 puisque sa dérivée seconde est également la fonction nulle.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(f, g) \in F_1^2$, posons $h = \lambda f + \mu g$. Alors :
$$h''(x) - h(x) = (\lambda f + \mu g)''(x) - (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f''(x) + \mu g''(x) - \lambda f(x) - \mu g(x)$$
par linéarité de la dérivée. Soit
$$h''(x) - h(x) = \lambda(f''(x) - f(x)) + \mu(g''(x) - g(x)) = 0$$
puisque f et g sont dans F_1.
On a donc $h = \lambda f + \mu g \in F_1$.

Conclusion : $\boxed{F_1 \text{ est sous-espace vectoriel de } E \text{ qui est un } \mathbb{R}\text{-EV. } F_1 \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$

② *Déterminons une famille génératrice de chacun des espaces vectoriels F_1, F_2 et F_3 :* C'est du cours sur les équations différentielle.... la forme des vecteurs de ces ensemble dépendant des solutions de l'équation caractéristique.

a) $(E_c) : r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$ admet deux racines réelles
Donc $F_1 = \{f \in E / \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
Conclusion : $\boxed{F_1 = \text{Vect}\{f_1, f_2\}}$ où $f_1 : x \longmapsto e^x$ et $f_2 : x \longmapsto e^{-x}$

b) $(E_c) : r^2 - \sqrt{2}r + 1 = (r - r_1)(r + r_2) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées
$$r_1 = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } r_2 = \overline{r_1}$$
Donc $F_2 = \{f \in E / \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\lambda_1 \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \lambda_2 \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)\right) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
Conclusion : $\boxed{F_1 = \text{Vect}\{g_1, g_2\}}$ où $g_1 : x \longmapsto \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$ et $g_2 : x \longmapsto \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

c) $(E_c) : 4r^2 - 4r + 1 = 4\left(r - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$ admet une racine double.
Donc $F_3 = \{f \in E / \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, f(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{x/2}, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
Conclusion : $\boxed{F_1 = \text{Vect}\{h_1, h_2\}}$ où $h_1 : x \longmapsto xe^{x/2}$ et $h_2 : x \longmapsto e^{x/2}$

③ Donner une base de chacun de ces espaces vectoriels (le justifier) et conclure sur leur dimension.
Il suffit de montrer que chacune des familles obtenues précédemment est une famille libre (là aussi, c'est du cours...)

a) Montrons que la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre :
Pour ça, considérons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} = 0 (*), \forall x \in \mathbb{R}$
$$(*) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \text{ pour } x = 0 \\ \lambda_1 e + \dfrac{\lambda_2}{e} & = 0 \text{ pour } x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 \text{ car système de rang 2}$$

En effet rg $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & 1/e \end{pmatrix} = 2$ car son déterminant vaut $1/e - e \neq 0$.
On conclut que $\{f_1, f_2\}$ est libre et génératrice. C'est une base de F_1.
Conclusion : $\boxed{F_1 \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 de base } (f_1, f_2)}$

b) Montrons que la famille $\{g_1, g_2\}$ est libre : Pour ça, considérons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda_1 \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \lambda_2 \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)\right) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} = 0 (**), \forall x \in \mathbb{R}$

$$(**) \Leftrightarrow \lambda_1 \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \lambda_2 \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = 0 \text{ pour } x = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \text{ pour } x = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On conclut que $\{g_1, g_2\}$ est libre et génératrice. C'est une base de F_2.
Conclusion : $\boxed{F_2 \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 de base } (g_1, g_2)}$

c) Montrons que la famille $\{h_1, h_2\}$ est libre :
Pour ça, considérons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x e^{x/2} + \lambda_2 e^{x/2} = 0 (*), \forall x \in \mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_1 x + \lambda 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 & = 0 \text{ pour } x = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \text{ pour } x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2$$

On conclut que $\{h_1, h_2\}$ est libre et génératrice. C'est une base de F_3.
Conclusion : $\boxed{F_3 \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 de base } (h_1, h_2)}$

Problème 1 :

On considère l'équation :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \ (E)$$

1. *Montrons grâce à un théorème d'analyse qu'elle admet trois racines réelles distinctes vérifiant :*

$$-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 1$.
C'est une fonction polynômiale, donc continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs :

$$f(-2) = -7,\ f(-1) = 1,\ f(1) = -1 \text{ et } f(2) = 1$$

Soit

$$f(-2) \cdot f(-1) < 0,\ f(0) \cdot f(1) < 0 \text{ et } f(1) \cdot f(2) < 0$$

Par application du théorème des valeurs intermédiaires, on obtient successivement :

$$\exists x_1 \in]-2, -1[/ f(x_1) = 0$$
$$\exists x_2 \in]0, 1[/ f(x_2) = 0$$
$$\exists x_3 \in]1, 2[/ f(x_3) = 0$$

Par ailleurs, f étant une fonction polynômiale de degré 3, elle admet au plus 3 racines réelles donc, sur chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$ il n'existe qu'une seule racine et il n'en n'existe pas en dehors de ces intervalles.

Conclusion : $\boxed{(E) \text{ admet 3 racines telles que : } -2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2}$

Lu dans le rapport de jury : « *La plupart des candidats établissent un tableau de variation de la fonction. L'existence des zéros ne peut s'en déduire s'en invoquer la continuité : le jury attendait la mention du théorème des valeurs intermédiaires. Le théorème de la bijection était également recevable* *à condition là encore de ne pas oublier la continuité dans les hypothèses. Ce théorème permettait aussi de trouver le nombre exacte de zéros. A noter que peu de candidats mentionnent le fait qu'un polynôme de degré 3 n'a pas plus de trois racines. »*

2. *Justifions la relation : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ puis déduisons-en les inégalités $|x_2| < |x_1| < |x_3|$:*

   Pour obtenir la première égalité, utilisons la factorisation de f dans $\mathbb{R}$, soit :
   $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$
   Par identification des termes de degré 2, on obtient immédiatement :
   $$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$$
   Pour la seconde inégalité, il est immédiat que $|x_2| < |x_1|$ car $0 < x_2 < 1 \Rightarrow 0 < |x_2| < 1$ et $-2 < x_1 < -1 \Rightarrow 1 < |x_1| < 2$.
   Il suffit donc de comparer $|x_1|$ et $|x_3|$, toutes les deux comprises dans l'intervalle $]1, 2[$: Pour cela, on peut par exemple dire que
   $$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow -|x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \Leftrightarrow |x_3| - |x_1| = 1 - |x_2|$$
   Or $|x_2| < 1$ donc on vient d'obtenir que $|x_3| - |x_1| > 0 \Leftrightarrow |x_1| < |x_3|$

   Conclusion : $\boxed{|x_2| < |x_1| < |x_3|}$

3. On considère l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout n entier naturel, la relation :
   $$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$
   a) *Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles :*

   - Par définition $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   - La suite nulle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un élément de E puisque tous ses termes étant nuls, ils vérifient évidemment la relation de récurrence : $u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout n entier naturel.
   - $\forall u, v \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $w = \lambda u + v$ est une suite de E : Pour tout n entier naturel,
   $$\begin{aligned} w_{n+3} - w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n &= (\lambda u_{n+3} + v_{n+3}) - (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) - 2(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n) \\ &= \lambda(u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + (v_{n+3} - v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n) \\ &= 0 \text{ car les suites } u \text{ et } v \text{ sont élément de } E. \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

   On admet désormais que $\dim E = 3$.

   b) *Montrons que les suites de termes généraux x_1^n, x_2^n et x_3^n sont des éléments de E :*
   Pour tout n entier naturel,
   $$x_1^{n+3} - x_1^{n+2} - 2x_1^{n+1} + x_1^n = x_1^n(x_1^3 - x_1^2 - 2x_1 + 1) = 0 \text{ d'après 1)}$$
   De même pour (x_2^n) et (x_3^n).

   Conclusion : $\boxed{(x_1^n), (x_2^n) \text{ et } (x_3^n) \text{ sont des éléments de } E}$

4. On considère le système (S) suivant :
   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 &= 1 \end{cases}$$

a) *Montrons qu'il admet une solution unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et déterminons λ_3 - Vérifions en particulier qu'il est non nul :*
Écrivons le système (S) sous la forme : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 1 \end{array}\right)$ et effectuons un pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - x_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - x_1^2 L_1 \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & 0 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (x_2 + x_1) L_2 \end{array}$$

Or $x_3 - x_1 \neq 0$ et $x_3 - x_2 \neq 0$ d'après 1) donc le rang de ce système vaut 3. On en déduit que (S) **admet une unique solution**.

Le système qui est échelonné se résout alors immédiatement :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ (x_2 - x_1)\lambda_2 + (x_3 - x_1)\lambda_3 & = 0 \\ (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\lambda_3 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La résolution de ce système n'a pas toujours été sans peine. Le jury attendait que le candidat justifie la non nullité des pivots. Les candidats ont rarement eu le réflexe de vérifier la « symétrie » de la solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (l'expression de λ_i s'obtient en fonction de celle λ_j par échange des indices i, j)* »

b) *Explicitons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3) :*
Il suffit de poursuivre la résolution précédente... On obtient immédiatement :

Conclusion : $\boxed{\lambda_3 = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},\ \lambda_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},\ \lambda_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}}$

5. On note a l'unique suite élément de E telle que :
$$a_0 = 0,\ a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 1$$

a) *Montrons par récurrence que la suite a est croissante et que, pour tout n supérieur ou égale à 2, a_n est strictement positif :*
Nous allons démontrer les deux propriétés simultanément en menant une « récurrence forte » à partir de $n = 2$, à savoir en posant :

$\mathcal{R}_n$: « a est croissante jusqu'au rang n et strictement positive du rang 2 au rang n ».

– $\mathcal{R}_2$ est vraie puisque $a_0 = 0 \leq a_1 = 0 < a_2 = 1$.
– Supposons $\mathcal{R}_n$ vraie avec $n \geq 2$.
– Alors $a \in E \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = (a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-1}$.
Or $a_{n-1} \geq 0$ et $a_{n-1} \geq a_{n-2}$ par hypothèse de récurrence. Donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$
Comme par hypothèse de récurrence, on a aussi $a_n > 0$, on a aussi : $a_{n+1} \geq a_n > 0$.
On vient de montrer que $\mathcal{R}_n \Rightarrow \mathcal{R}_{n+1}$.

Conclusion : $\boxed{a \text{ est croissante et, } \forall n \geq 2,\ a_n > 0.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Le jury attend un énoncé clair de l'hypothèse de récurrence utilisé et sa vérification soigneuse au premier indice. Une propriété comme « la suite (a_n) est croissante » n'est pas une hypothèse de récurrence ; l'hypothèse parfois rencontrée « la suite a et* *croissante jusqu'à l'ordre n » aurait mérité d'être précisée. »*

b) *Montrons que les suites de termes généraux respectifs x_1^n, x_2^n et x_3^n forment une base de E :*
Nous avons déjà vu en 3.a) que les suites (x_1^n), (x_2^n) et (x_3^n) sont trois vecteurs de E.
Par ailleurs $\text{Card}((x_1^n),(x_2^n),(x_3^n)) = 3 = \dim(E)$, donc il est suffisant de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de E :

Soit $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3 / \lambda x_1^n + \mu x_2^n + \nu x_3^n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
En prenant comme valeurs particulières de n les valeurs 0, 1 et 2, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda+\mu+\nu & = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 & = 0 \\ \lambda x_1^2 + \mu x_2^2 + \nu x_3^2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & 0 \\ 0 & 0 & (x_3-x_1)(x_3-x_2) & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \lambda = 0 = \mu = \nu$$

Conclusion : $\boxed{((x_1^n),(x_2^n),(x_3^n)) \text{ est une base de } E}$

Autrement dit : $\boxed{\exists!(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 / a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

c) On pose, pour $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Montrons que la suite b ainsi définie converge vers x_3 :
Pour tout $n \geq 2$,

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_3^{n+1}\left(\lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n+1} + \lambda_3\right)}{x_3^n\left(\lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + \lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n} + \lambda_3\right)}$$

Or $|x_1| < |x_3|$ et $|x_2| < |x_3|$ (cf. 2)),
donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n = 0$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = x_3}$

6. *Application numérique :*

Écrire une fonction Python permettant de calculer et d'afficher à l'écran les valeurs de a_n et b_n pour une valeur de n qui sera demandée à l'utilisateur.
Préciser les valeurs approchées à 10^{-2} près de b_n pour n variant de 2 à 20 :

On dispose de deux relations de récurrences :

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n \text{ et } b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $a_0 = 0 = a_1$ et $a_2 = 1$.

La fonction que nous nommons `convergence(n)` prend en paramètre d'entrée l'indice des termes a_n et b_n que l'utilisateur souhaite calculer et retourne sous forme de couple le calcul de chacun d'entre eux.

On commence par initialiser x, y et z respectivement égaux à a_0, a_1 et a_2 et, dans ces conditions, $a_3 = -x + 2y + z$ et $b_2 = a/z$.

Pour calculer a_n et b_n simultanément, on répète $(n-2)$ fois les mêmes opérations (la première fois on calcule b_2), à savoir :

a← -x+2y+z
b← a/z
x←y ; y← z ; z← a

Une rédaction possible est la suivante :

```
def convergence(n):
    x,y,z = 0,0,1 # a0 = x,a1 = y et a2 =z
    for k in range(3,n+1) : # k va de 3 à n
       a = -x+2*y+z # calcul de a_k+1
       b = a/z # calcul de b_k = a_k+1/a_k
       x,y,z = y,z,a # mise à jour des variables
    return a,b
```

Pour afficher les valeurs de b_2 à b_{20} il suffit alors d'exécuter :

```
Lb = [round(convergence(k)[1],2) for k in range(2,21)]
print(Lb)
```

On obtient alors :

```
Lb = [1.0, 3.0, 1.333, 2.25, 1.556, 2.0, 1.679, 1.894, 1.742, 1.845, 1.773, 1.822, 1.788,
1.812, 1.795, 1.807, 1.799, 1.804, 1.8]
```

Problème 2 :

I/ Fonction « gamma » d'Euler :

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Montrons que f_λ est une densité de probabilité :

a) f est continue sur $]-\infty, 0]$ car constante égale à 0 et sur $]0, +\infty[$ car $x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} f_\lambda(x) = \lambda \neq f_\lambda(0) = 0$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

b) $\lambda > 0$ donc il est immédiat que $\boxed{f_\lambda \text{ est positive sur } \mathbb{R}}$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$ par application de la relation de Chasles.
Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.
Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$ car $\lambda > 0$. Soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\boxed{f_\lambda \text{ est une densité de probabilité}}$.

② a) Si $0 < \alpha < 1$ alors $\underset{t\to+\infty}{lim}\, t^{\alpha-1} = 0 = \underset{t\to+\infty}{lim}\, e^{-t/2}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$ et si $\alpha \geq 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$.
Quel que soit le cas de figure, il existe donc un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

D'autre part , $\forall t > 0, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} > 0$

$$\boxed{\text{il existe } A > 0 \text{ tel que } \forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1 \ (*)}$$

La fonction : $f : t \longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$
$\forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ s'obtient en multipliant $(*)$ par $e^{-t/2}$.
et $\int_A^{+\infty} e^{-t/2}dt$ est convergente (car $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente pour tout $a > 0$)
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives,

$$\boxed{\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}dt \text{ converge}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La limite est en général trouvée. Par contre l'encadrement est rarement justifié et le théorème sur les intégrales de fonctions positives rarement cité.*
On constate des confusions avec les suites : « à partir d'un certain rang ... »
Plusieurs candidats affirment que $\displaystyle\int_A^{+\infty} dx$ *converge.*
D'autres pensent que la fonction étant bornée, l'intégrale converge. Ou encore que la fonction ayant une limite nulle, l'intégrale converge... On peut lire aussi :

$$0 \leq f \leq g \ sur\ [A, +\infty[\ donc \int_A^{\infty} f(x)dx \leq \int_A^{\infty} g(x)dx$$

or $\displaystyle\int_A^{\infty} g(x)dx$ *converge donc* $\displaystyle\int_A^{\infty} f(x)dx$ *converge.* »

b) $\forall t \in]0, A], \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$

$\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ est convergente car, si on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^A t^{\alpha-1} = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_x^A$, soit $G(x) = \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha}$,

alors $\underset{x\to0}{lim} G(x) = \underset{x\to0}{lim} \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha} = \dfrac{A^\alpha}{\alpha}$ puisque $\alpha > 0$. Soit $\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge.
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

Lu dans le rapport de jury : « *Le problème de la borne* 0 *est très rarement perçu.* »

Et par application de la relation de Chasles, on peut conclure à l'aide des questions 2.a) et 2.b) que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \Gamma(\alpha) \text{ converge pour } \alpha > 0}$$

③ a) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (on reconnaît f_1 étudiée à la question 1)).
b) $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt$.
On pose : $\begin{cases} u(t) = t^\alpha & u'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ si $0 < \alpha < 1$ et sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 1$.

✐ On évitera de distinguer les cas en écrivant que pour tout $\alpha > 0$, u, v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ car $\alpha > 0$
On peut donc faire l'intégration par parties directement dans l'intégrale généralisée :
$\Gamma(\alpha+1) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

✐ *Remarque :* Si on souhaite repasser par une intégrale définie de première année, il faut faire l'intégration par parties sur :

$$\int_x^y t^\alpha e^{-t}dt \text{ puis faire la limite quand } x \text{ tend vers 0 et } y \text{ tend vers } +\infty...$$

Lu dans le rapport de jury : « *Des intégrations par parties sont effectuées directement (sans précaution) sur des intégrales impropres* ».

c) Une récurrence s'impose :
- Pour $n = 1$, on a $\Gamma(n) = \Gamma(1) = 1 = 0!$ d'après 3.a)
- On suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour n fixé $(n \geq 1)$
- Alors, d'après la question précédente : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$.
- ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certaines notions élémentaires ne sont pas comprises. Ici, aucune « suite géométrique de raison n... »*
Rappelons que le résultat étant donné par l'énoncé, une justification « récurrence immédiate » ne peut suffire. »

④ a) pour $n = 1$, on obtient immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{n,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda}{0!}x^0 e^{-\lambda x} = f_\lambda(x)$.

Conclusion : $\boxed{\varphi_{n,\lambda} = f_\lambda}$

b) $\varphi_{n,\lambda}$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx$
A l'aide du changement de variable $t = \lambda x$, $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n) = 1$

$$\boxed{\varphi_{n,\lambda} \text{ est une densité de probabilité}}$$

c) On étudie la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x\varphi_{n,\lambda}(x)|dx = \int_0^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$,
d'après la relation de Chasles et parce que $\varphi_{n,\lambda}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\int_0^{+\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx$ qui est une intégrale convergente.
Donc $\mathbb{E}(U)$ existe et vaut : $\frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx = \dfrac{n}{\lambda}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une espérance et } E(U) = \frac{n}{\lambda}}$$

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① *Précisons l'ensemble de continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y :*

- Si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $x-1 \geq 0$ et $y-1 \geq 0$. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est donc continue sur $[0,1]$.
- Si $0 < x < 1$ et $y \geq 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1]$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1]$.
- Si $x \geq 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$.
- Si $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.

✐ On retiendra que $B(x,y)$ est une intégrale définie pour tout $x, y \geq 1$ et une intégrale généralisée sinon.

② *Démontrons grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (on ne demande pas leur valeur).*

Il suffit de poser $u = 1 - t = \varphi(t)$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et strictement décroissante.
Dès lors, $B(y,x) = \displaystyle\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$ est de même nature que :

$$\int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}(-du) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du = B(x,y)$$

Conclusion : $\boxed{B(y,x) \text{ et } B(x,y) \text{ sont de même nature et } B(y,x) = B(x,y) \text{ en cas de convergence}}$

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) *Calculons $B(1,q)$:* $B(1,q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}dt = \left[-\dfrac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 = \dfrac{1^q}{q}$

$$\boxed{B(1,q) = \frac{1}{q}}$$

b) Pour $p \geq 2$, *calculons $B(p,q)$ en fonction de p, q et $B(p-1,q+1)$:*

Menons une intégration par parties en notant que, puisque $p-1 \geq 1$ et $q \geq 1$, les intégrales $B(p,q)$ et $B(p-1,q+1)$ sont des intégrales définies.

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^{p-1} & u'(t) = (p-1)t^{p-2} \\ v'(t) = (1-t)^{q-1} & v(t) = -\dfrac{(1-t)^q}{q} \end{cases} \qquad u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]$$

$$B(p,q) = \left[-t^{p-1}\frac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 + \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)$$

$$\boxed{B(p,q) = \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)}$$

c) *En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ autrement dit : $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$*

Menons une récurrence sur p en posant : $\forall p \geq 1, H_p =$« $\forall q \geq 1, B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ »

Initialisation : H_1 est vrai d'après a)
Hérédité : Soit $p \geq 1$ tel que H_p est vrai
$B(p+1,q) = \dfrac{p}{q}B(p,q+1) = \dfrac{p}{q}\dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q)!} = \dfrac{(p+1-1)!(q-1)!}{(p+1+q-1)!}$ d'où H_{p+1} est vrai
Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p \geq 1, \forall q \geq 1, B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x, y réels strictement positifs.

a) *Montrons que pour tout $x \in]0,1[$, $B(x,1-x)$ est une intégrale généralisée convergente qui vaut $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$:*
Si $x \in]0,1[$, alors on a également $1-x \in]0,1[$. Donc, d'après la question II/1) nous savons que l'intégrale $B(x,1-x)$ est doublement généralisée.
Mais, si la relation $(*)$ reste vraie pour tous les réels x, y strictement positifs, elle est donc vraie pour $x > 0$ et $1-x > 0$.
Dès lors :

$$B(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$$

puisque $\Gamma(1) = 1$ d'après I/3)a.
Or on a vu dans la première partie du problème que $\Gamma(\alpha)$ converge pour tout $\alpha > 0$ donc $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1-x)$ convergent.
Conclusion : $\boxed{B(x,1-x) \text{ converge et vaut } \Gamma(x)\Gamma(1-x)}$

b) A l'aide de II/2) et en posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, *montrons que* $B(x,1-x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du$ *:*

On commence par noter que $B(x,1-x) = B(1-x,x)$ en utilisant la question II/2).
Puis en suivant l'indication : $t = \dfrac{1}{1+u} \Leftrightarrow 1+u = \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{t} - 1 = \psi(t)$.
La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et strictement décroissante.
Ce changement de variable ne change donc pas la nature de l'intégrale.
Pour préparer le changement de variable, on note par ailleurs que

$$1-t = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} \text{ et } dt = -\frac{1}{(1+u)^2}du$$

Dès lors $B(1-x,x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}(1-t)^{x-1}dt$ qui converge d'après 4.a) est égale à :

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{-x} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(-\frac{du}{(1+u)^2}\right) \text{ avec } \alpha = \lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty \text{ et } \beta = \lim_{x\to 1}\psi(t) = 0$$

Soit

$$\boxed{B(1-x,x) = J = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du}$$

c) *Calculons* $\Gamma(0.5)$ *en pensant au changement de variable : $v = \sqrt{u}$:*
En prenant $x = 0.5$, puisque $1-x = 0.5$, on obtient :

$$\Gamma^2(0.5) = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u)\sqrt{u}}du$$

C'est alors qu'on utilise le changement de variable recommandé. La fonction $u \longmapsto \sqrt{u} = v$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante. Donc, puisqu'on est assuré de la convergence de $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et que ce changement de variable ne change pas sa nature, on a immédiatement :

$$\Gamma^2(0.5) = \int_0^\infty \frac{2vdv}{(1+v^2)v} = 2\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} = \pi$$

Conclusion : $\boxed{\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}}$

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

a) *Pour tout $\alpha > 1$, montrons en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha}dx$ converge :*
Puisque $\alpha > 1$, si $x \geq 1$ alors $x^\alpha \geq x$ et donc $-x^\alpha \leq -x$.
Dès lors

$$\forall x \geq 1,\ e^{-x^\alpha} \leq e^{-x}$$

Or $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}dx$ converge puisque $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty} (1 - e^{-t})$ existe et vaut 1.
Dès lors, par application du théorème de convergence par comparaison des intégrales de fonctions positives : $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha}dx \text{ converge}}$.

On peut en déduire que $\boxed{\displaystyle I_\alpha = \int_0^\infty e^{-x^\alpha}dx \text{ converge}}$ par application de la relation de Chasles car la fonction $x \longmapsto e^{-x^\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$.

b) *A l'aide du changement de variable $t = x^\alpha$, montrons que : $I_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$:*

Posons $\varphi(x) = x^\alpha = t$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante.
Par ailleurs : $t = x^\alpha \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{\alpha}}$ et donc

$$dx = \frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt \text{ et } \lim_{x\to0}\varphi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$$

Donc $\displaystyle I_\alpha = \int_0^\infty e^{-x^\alpha}dx$ est de même nature que :

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-t}dt$$

D'après la question précédente, ces deux intégrales sont convergentes. On peut donc conclure à leur égalité et conclure : $\boxed{I_\alpha = J_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

c) *Montrons qu'on peut en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss :*
Il suffit de prendre $\alpha = 2$ dans l'intégrale précédente.
Alors $\displaystyle I_2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Or on a montré que 4.c) que $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$ donc $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Pour terminer, il suffit de noter que la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est paire.

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \text{ converge et vaut } 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}}$