MATHEMATIQUES
Analyse et algèbre

Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'**est pas** autorisé.*
Si au cours de l'épreuve, vous repèrez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-là sur la copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Soit

$$F_1 = \{f \in E / f''(x) - f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$F_2 = \{f \in E / f''(x) - \sqrt{2} f'(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_3 = \{f \in E / 4f''(x) - 4f'(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

① Démontrer que F_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (on admettra que F_2 et F_3 le sont également).

② Déterminer une famille génératrice de chacun des espaces vectoriels F_1, F_2 et F_3.

③ Donner une base de chacun de ces espaces vectoriels (le justifier) et conclure sur le dimension.

Problème 1 :

On considère l'équation :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

① Montrer grâce à un théorème d'analyse qu'elle admet trois racines réelles distinctes vérifiant :

$$-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$

② Justifier la relation : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ puis en déduire les inégalités $|x_2| < |x_1| < |x_3|$ (☕ = *pas si facile...)*

③ On admet que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et on considère l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout n entier naturel, la relation :

$$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

On admet désormais que $\dim E = 3$.

b) Montrer que les suites de termes généraux x_1^n, x_2^n et x_3^n sont des éléments de E.

④ On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 & = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 & = 1 \end{cases}$$

a) Montrer qu'il admet une solution unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et déterminer λ_3. Vérifier en particulier qu'il est non nul.

b) Expliciter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3).

⑤ On note a l'unique suite élément de E telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 1$$

a) Montrer par récurrence que la suite a est croissante et que, pour tout n supérieur ou égale à 2, a_n est strictement positif.

b) Montrer que les suites de termes généraux respectifs x_1^n, x_2^n et x_3^n forment une base de E. En déduire qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que, pour tout n entier naturel, on ait :

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$$

c) On pose, pour $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Montrer que la suite b ainsi définie converge vers x_3.

⑥ *Application numérique :*

Écrire une fonction Python permettant de calculer et d'afficher à l'écran les valeurs de a_n et b_n pour une valeur de n qui sera demandée à l'utilisateur.
Écrire une ligne de code Python permettant de calculer les valeurs approchées à 10^{-3} près de b_n pour n variant de 2 à 20.

Problème 2 :

λ désignera dans tout le problème un réel strictement positif.

On rappelle que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1, alors f est une densité de probabilité.

I/ Fonction « gamma » d'Euler :

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.
Montrer que f_λ est une densité de probabilité.

② Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

a) En utilisant $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}$, montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que, pour tout $t > A$,

$$0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

En déduire que $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ et $\Gamma(\alpha)$ convergent pour tout $\alpha > 0$.

③ a) Calculer $\Gamma(1)$.
b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$

④ On considère la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ définie par : $\varphi_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

a) Reconnaître $\varphi_{1,\lambda}$.
b) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\varphi_{n,\lambda}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser le changement de variable : $t = \lambda x$.
c) Soit U une variable aléatoire ayant $\varphi_{n,\lambda}$ pour densité. On dira que U admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$ converge absolument et que, sous cette condition : $\mathbb{E}(U) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$.
Montrer que U admet une espérance et la calculer.

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① Préciser la continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur l'intervalle d'intégration $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y et justifier notamment que $B(x,y)$ est une intégrale définie pour tout $x \geq 1$ et $y \geq 1$ et une intégrale généralisée sinon.

② Démontrer grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (*on ne demande pas leur valeur*).

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) Calculer $B(1,q)$.
b) Pour $p \geq 2$, calculer $B(p,q)$ en fonction de p, q et $B(p-1,q+1)$.
c) En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (*)$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x,y réels strictement positifs.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $B(x,1-x)$ est une intégrale généralisée convergente qui vaut $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$.
b) En posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, montrer par ailleurs que $B(x,1-x) = B(1-x,x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du$.
c) Calculer $\Gamma(0.5)$ en pensant au changement de variable : $v = \sqrt{u}$.

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

a) Pour tout $\alpha > 1$, montrer en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^{\alpha}}dx$ converge.
En déduire que $I_{\alpha} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^{\alpha}}dx$ converge.
b) A l'aide du changement de variable $t = x^{\alpha}$, montrer que $I_{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.
c) En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss.