Devoir surveillé : Probabilités et Calcul matriciel

Le sujet se compose de deux problèmes. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé au cours de l'épreuve.

Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de trois manières différentes la puissance n-ième d'une matrice.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Première méthode :
   a) Exprimer J^n en fonction de J pour tout entier naturel n.
   b) Déterminer deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$.
   c) Calculer M^n pour tout entier naturel n.

2. Deuxième méthode :
   a) Calculer $M^2 - \dfrac{5}{4}M + \dfrac{1}{4}I_3$ où I_3 désigne la matrice identité.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_n M + b_n I_3$.
   c) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n ; préciser a_0, a_1, b_0 et b_1.
   d) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; En déduire a_n et b_n en fonction de n et conclure sur M^n.

3. Troisième méthode : On pose $A_\lambda = M - \lambda I_3 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   a) Soit (S_λ) le système homogène $A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
      i. Montrer que si E_λ désigne l'ensemble des solutions de (S_λ), alors E_λ est un espace vectoriel.
      ii. Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) n'admet pas une unique solution. On notera désormais λ_1 et λ_2 ces deux valeurs avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
      iii. Déterminer E_{λ_1} et E_{λ_2}. En donner une base dont tous les vecteurs ont leurs coordonnées dans $\{-1, 0, 1\}$.
   b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est constituée de 3 colonnes dont l'une est solution de E_{λ_1} et les deux autres sont solutions de E_{λ_2}. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   c) Calculer $D = P^{-1}MP$ ainsi que D^n pour tout entier naturel n.
   d) Démontrer par récurrence que $D^n = P^{-1}M^nP$ pour tout entier naturel n.
   e) En déduire l'expression de M^n.

Problème 2 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A, d'affixe 1, B d'affixe $e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et C d'affixe $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.
Par convention, au regard du sens trigonométrique, on dira que B *suit* A, que C suit B et que A suit C ou encore que A *précède* B, B précède C, C précède A.

Un point mobile M parcourt aléatoirement le triangle ABC de la façon suivante :
Au départ le mobile est en A.
Si à l'instant n il se trouve sur l'un des sommets du triangle, alors à l'instant $(n+1)$ il sera :

- ➤ au sommet suivant avec la probabilité p.
- ➤ au sommet précédent avec la probabilité q.
- ➤ au même sommet avec la probabilité r.

Il est admis que p, q et r sont trois réels positifs vérifiant : $p+q+r=1$.

Étant donné un sommet quelconque S du triangle, on désigne par S_n l'événement : « à l'instant n le point M se trouve en S » et par $\mathbb{P}(S_n)$ la probabilité de cet événement.
L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement du point M lorsque n tend vers l'infini, dans quelques cas particuliers, puis dans le cas général.

I/ Questions préliminaires

1. Déterminer $\mathbb{P}(A_0)$, $\mathbb{P}(B_0)$ et $\mathbb{P}(C_0)$.

2. Représenter le triangle ABC et calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(C_1)$.

3. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(B_n)+\mathbb{P}(C_n)=1$

4. Déterminer $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.

5. On pose $a_n=\mathbb{P}(A_n)$, $b_n=\mathbb{P}(B_n)$ et $c_n=\mathbb{P}(C_n)$. Démontrer, en appliquant trois fois la formule des probabilités totales, que : $\forall n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} a_{n+1}=ra_n+qb_n+pc_n \\ b_{n+1}=pa_n+rb_n+qc_n \\ c_{n+1}=qa_n+pb_n+rc_n \end{cases}$$

6. Calculer a_2, b_2 et c_2.

II/ Étude informatique : modélisation de l'évolution du mobile au cours du temps

1. On prend pour convention que la position du mobile vaut 0 s'il est en A, 1 s'il est en B et 2 s'il est en C. On suppose écrite les listes `Td=[1,2,0]` et `Ti=[2,0,1]`.
Soit `pos` une variable entière prenant les valeurs 0, 1 ou 2 et correspondant à la position du mobile à un instant t. Quel sens donnez-vous à `Td[pos]` et à `Ti[pos]` ?

2. Écrire une fonction `deplacement(p,q,n)` qui exploite les listes `Td` et `Ti` et retourne sous forme d'un entier compris entre 0 et 2 la position du mobile à l'instant $t=n$ (en supposant toujours qu'il part de A) et affiche à l'écran la phrase : « `le mobile est en ... à l'instant t = n` ».
✐ On pourra utiliser la fonction `rdm.random()`.

3. Écrire une fonction `arriveEnC(p,q)` qui retourne le nombre de pas nécessaire pour rejoindre le point C. Comment estimer l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre de pas pour atteindre C ?

4. Écrire une fonction `estimProba(m,n)` permettant d'estimer la probabilité d'être respectivement en A, B et C à l'instant $t = n$ en retournant une liste `[pA,pB,pC]` formée des fréquences respectives des positions A, B et C à l'issue de `m` répétitions de l'expérience.

III/ Étude du cas $p = q$ avec $p \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$ et $r = 1 - 2p$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = M \cdot X_n$ où $M = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
2. Une matrice est dite stochastique si la somme des termes dans chacune de ses colonnes vaut 1.
   a) Donner un argument probabiliste qui justifie que M est une matrice stochastique.
   b) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que leur produit est encore une matrice stochastique.
3. Montrer que : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. On considère le cas particulier pour lequel, si à l'instant n le mobile est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n + 1)$, soit il y reste avec une probabilité de $r = 1/2$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.
   Montrer que le problème 1 permet de déterminer les limites respectives des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Que pouvez-vous dire du comportement asymptotique du mobile ?
5. Dans le cas général et au regard des hypothèses, on écrit désormais $M = \begin{pmatrix} 1-2p & p & p \\ p & 1-2p & p \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$.
   a) Montrer qu'il existe deux valeurs réelles de λ pour lesquelles le système $(S_\lambda) : (M - \lambda I_3) \cdot X = 0$, où I_3 désigne la matrice identité, n'admet pas une unique solution.
   b) Soient λ_1 et λ_2 les deux valeurs obtenues précédemment, avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
   Résoudre (S_{λ_1}) et (S_{λ_2}).
6. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que cette matrice est formée de colonnes solutions de (S_{λ_1}) et (S_{λ_2}).
   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
7. Calculer la matrice $M' = P^{-1}MP$.
8. Exprimer M en fonction de P, P^{-1} et M'. En déduire que $M^n = PM'^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.
9. Conclure sur une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n et de p.
10. Que peut-on dire du comportement du point en l'infini ? Comment utiliser vos fonctions Python, écrites dans la partie II, pour valider votre réponse ?