

CORRECTION
Probabilités et calcul matriciel (3H00)

Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de trois manières différentes la puissance n -ième d'une matrice.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Première méthode :

a) *Exprimons J^n en fonction de J pour tout entier naturel n :*

Un calcul rapide montre que $J^2 = 3J$.

On va montrer par récurrence que $J^n = 3^{n-1}J \forall n \in \mathbb{N}^*$.

– $J^1 = J = 3^0J$ suffit à initialiser cette récurrence pour $n = 1$.

– On suppose que $J^n = 3^{n-1}J$ pour un entier $n \geq 1$.

– Alors $J^{n+1} = J^n J = 3^{n-1}J^2 = 3^{n-1}3J = 3^n J$. Ce qui prouve l'hérédité de la relation.

Conclusion : $J^n = 3^{n-1}J, \forall n \geq 1$ et $J^0 = I$

b) *Déterminons deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$:*

$$M = aI + bJ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}$$

Or deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

On obtient donc le système : $\begin{cases} a+b = 1/2 \\ b = 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{4}$.

Conclusion : $M = \frac{1}{4}I + \frac{1}{4}J$; *Rq :* on pouvait aussi noter directement que $4M = I + J$

c) *Calculons M^n pour tout entier naturel n :*

Si $n = 0$, $M^n = M^0 = I$.

Sinon, la relation précédente nous invite à utiliser la formule du binôme de Newton, ce qui est possible car I et J commutent.

Alors, $\forall n > 0$:

$$M^n = \left(\frac{1}{4}I + \frac{1}{4}J \right)^n = \frac{1}{4^n} (I + J)^n = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k$$

On utilise alors le résultat de la question 1. en prenant soin de distinguer le cas $k = 0$.

Dès lors :

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{4^n} \left[\binom{n}{0} J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} J^k \right] = \frac{1}{4^n} \left[I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} J \right] \\ &= \frac{1}{4^n} \left[I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k \right) J \right] = \frac{1}{4^n} \left[I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) J \right] \\ &= \frac{1}{4^n} \left(I + \frac{4^n - 1}{3} J \right) = \frac{1}{4^n} I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) J \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } M^n = I \text{ si } n = 0 \text{ et } M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} \end{pmatrix} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*$$

2. Deuxième méthode :

a) Après calculs... on obtient : $M^2 - \frac{5}{4}M + \frac{1}{4}I = 0$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_n M + b_n I$:

- *Initialisation* : La propriété est vraie pour $n = 0$ car $M^0 = I = 0M + 1I$. On a dans ce cas $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
- On suppose la propriété vraie au rang n . C'est-à-dire $\exists(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = a_n M + b_n I$.
- *Hérédité* :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (a_n M + b_n I) \times M = a_n M^2 + b_n M \\ &= a_n \left(\frac{5}{4}M - \frac{1}{4}I \right) + b_n M = \left(\frac{5}{4}a_n + b_n \right) M - \frac{1}{4}a_n I \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$ on prouve l'existence de deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$. La propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion** : La propriété est vraie pour tout entier naturel n

c) D'après ce qui précède, on a $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

On sait déjà que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Comme $M^1 = 1.M + 0.I$ on en déduit que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

d) Montrons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : La question précédente permet d'assurer que : $a_{n+2} = \frac{5}{4}a_{n+1} + b_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

D'où, sachant que pour tout entier naturel n : $b_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$, on a :

$$a_{n+2} = \frac{5}{4}a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Conclusion : $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique est : $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{1}{4}$ dont les racines sont les mêmes que celles de l'équation $4r^2 - 5r + 1 = 0$, c'est-à-dire $r = 1$ et $r = \frac{1}{4}$.

D'où $a_n = \lambda 1^n + \mu \left(\frac{1}{4} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Les conditions à l'origine permettent d'obtenir le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \frac{1}{4}\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4}{3} \\ \mu = -\frac{4}{3} \end{cases}$.

Dès lors :

$$a_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{1}{4}a_{n-1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} M^n &= \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] \times I \\ &= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] \times I \\ &= \frac{1}{3} \left(\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] \times I \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left[-1 + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] \times I \right) \end{aligned}$$

Conclusion : $M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} \end{pmatrix}$ si $n \in \mathbb{N}$

3. Troisième méthode : On pose $A_\lambda = M - \lambda I = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - 4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - 4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - 4\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Soit (S_λ) le système homogène $A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i. (S_λ) n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée A_λ n'est pas inversible ou encore si et seulement si $\text{rg}(A_\lambda) < 3$.

$$\begin{aligned} \text{rg} A_\lambda &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 - 4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - 4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - 4\lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 - 4\lambda \\ 1 & 2 - 4\lambda & 1 \\ 2 - 4\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_3) \\ (L_2) \\ (L_1) \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 - 4\lambda \\ 0 & 1 - 4\lambda & -(1 - 4\lambda) \\ 0 & -1 + 4\lambda & 1 - (2 - 4\lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2 - L_1) \\ (L_3 - (2 - 4\lambda)L_1) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\text{avec } 1 - (2 - 4\lambda)^2 = [1 - (2 - 4\lambda)][1 + (2 - 4\lambda)] = (4\lambda - 1)(3 - 4\lambda).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{rg} A_\lambda &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 - 4\lambda \\ 0 & 1 - 4\lambda & -(1 - 4\lambda) \\ 0 & -1 + 4\lambda & (4\lambda - 1)(3 - 4\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 - 4\lambda \\ 0 & 1 - 4\lambda & -(1 - 4\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 + L_2) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\text{avec } P(\lambda) = (1 - 4\lambda)(4\lambda - 3) - (1 - 4\lambda) = (1 - 4\lambda)(4\lambda - 3 - 1) = 4(1 - 4\lambda)(\lambda - 1).$$

En conséquence, $\text{rg}A_\lambda < 3 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda = 0$ ou $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda = 0$ où $\lambda - 1 = 0$.

Conclusion : (S_λ) n'est pas de Cramer si $\lambda = \lambda_1 = 1$ ou $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{4}$

ii. Soit E_λ l'espace vectoriel solution de (S_λ) dans chacun de ces deux cas.

Par définition, $E_{\lambda_1} = E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (S_1)\}$

D'après ce qui précède, en prenant $\lambda = 1$, on obtient :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $E_1 = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$

Par définition, $E_{\lambda_2} = E_{\frac{1}{4}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / A_{\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (S_{\frac{1}{4}})\}$

D'après ce qui précède, en prenant cette fois $\lambda = \frac{1}{4}$, on obtient :

$$(S_{\frac{1}{4}}) \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -y - x, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

Conclusion : $E_{\frac{1}{4}} = \{(-y - x, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrons que P est inversible et calculer P^{-1} :

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

P est inversible si et seulement si le système associé $PX = X'$ est un système de Cramer. On aura alors $X = P^{-1}X'$.

$$PX = X' \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = x' \\ x + z = y' \\ x + y = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y' - x \\ y = z' - x \\ xy - z = x - z' + x - y' + x = x' \end{cases} \begin{matrix} (L_2) \\ (L_3) \\ (L_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + y' + z') \\ y = z' - \frac{1}{3}(x' + y' + z') = \frac{1}{3}(-x' - y' + 2z') \\ z = y' - \frac{1}{3}(x' + y' + z') = \frac{1}{3}(-x' + 2y' - z') \end{cases}$$

L'unicité de la solution prouve qu'il s'agit bien d'un système de Cramer.

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) Calculons $D = P^{-1}MP$ ainsi que D^n pour tout entier naturel n :

Un calcul rapide donne :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = D$$

On montre alors par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}$$

d) Démontrons par récurrence que $D^n = P^{-1}M^nP$ pour tout entier naturel n :

- La relation est vraie pour $n = 0$ puisque $D^0 = I = P^{-1}IP$ et vraie pour $n = 1$ d'après la question 3.c)
- Supposons la vraie pour un entier $n \geq 0$.
- Alors $D^{n+1} = D^n \cdot D = P^{-1}M^nP \cdot P^{-1}MP = P^{-1}M^nIMP = P^{-1}M^{n+1}P$.
Ce qui prouve l'hérédité de cette relation.

Conclusion :
$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}M^nP$$

e) De l'égalité précédente, on tire en multipliant à gauche par P , à droite par P^{-1} :
 $\forall n \in \mathbb{N}, PD^nP^{-1} = PP^{-1}M^nPP^{-1} = M^n$.

On obtient dès lors aisément :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :
$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{2}{4^n} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Problème 2 :**I/ Questions préliminaires**

1. Déterminons
- $\mathbb{P}(A_0)$
- ,
- $\mathbb{P}(B_0)$
- et
- $\mathbb{P}(C_0)$
- :

D'après les hypothèses, le mobile est au départ au sommet A .

Il en découle que : $\mathbb{P}(A_0) = 1, \mathbb{P}(B_0) = 0$ et $\mathbb{P}(C_0) = 0$

2. Calculons
- $\mathbb{P}(A_1)$
- ,
- $\mathbb{P}(B_1)$
- et
- $\mathbb{P}(C_1)$
- :

A l'instant 0 le mobile est en A . La probabilité qu'il reste en A est r , donc $\mathbb{P}(A_1) = r$.

La probabilité qu'il passe en B qui est le sommet qui suit A est p , donc $\mathbb{P}(B_1) = p$.

La probabilité enfin qu'il passe en C qui est le sommet qui précède A est q , donc $\mathbb{P}(C_1) = q$.

3. Justifions que, pour tout entier naturel
- n
- , on a :
- $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$
- :

Notons au préalable qu'à chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$) le mobile est sur l'un des trois sommets du triangle (Une récurrence rapide permet de s'en assurer puisqu'il est sur le sommet A au départ et en supposant qu'il est à un instant n fixé sur l'un des trois sommets, les règles de parcourt aléatoire présentées par l'énoncé nous assurent qu'à l'instant $n + 1$ il sera encore sur l'un des trois sommets...)

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'évènements.

Conclusion : $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1$

4. A la lecture de l'énoncé :

$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = r, \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = q$ et $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = p$.

5. On pose
- $a_n = \mathbb{P}(A_n)$
- ,
- $b_n = \mathbb{P}(B_n)$
- et
- $c_n = \mathbb{P}(C_n)$
- .

On rappelle que $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'évènements

Par application de la formule des probabilités totales, on a donc :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \cdot \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \cdot \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \cdot \mathbb{P}(C_n)$$

Autrement dit :

$$a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n$$

En notant par ailleurs que :

$$\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = p, \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = r \text{ et } \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = q$$

et

$$\mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = q, \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = p \text{ et } \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = r$$

on peut conclure par application successive de la formule des probabilités totales que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n + rc_n \end{cases}$$

6. D'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_2 = ra_1 + qb_1 + pc_1 = r^2 + qp + pq = r^2 + 2pq \\ b_2 = pa_1 + rb_1 + qc_1 = 2pr + q^2 \\ c_2 = qa_1 + pb_1 + rc_1 = 2qr + p^2 \end{cases}$$

II/ Étude informatique : modélisation de l'évolution du mobile au cours du temps

1. On prend pour convention que la position du mobile vaut 0 s'il est en A , 1 s'il est en B et 2 s'il est en C . On considère les listes $Td=[1,2,0]$ et $Ti=[2,0,1]$.

Si $pos=i$ où $i \in \llbracket 0,2 \rrbracket$, alors trois cas se présentent :

- Si le mobile est en A , à savoir $pos=0$ et qu'il se déplace dans le sens trigonométrique, alors $Td[pos]=Td[0]=1$. Il est désormais en B .
S'il se déplace dans le sens indirect, alors $Ti[pos]=Ti[0]=2$. Il est arrivé en C .
- Si le mobile est en B , à savoir $pos=1$ et qu'il se déplace dans le sens trigonométrique, alors $Td[pos]=Td[1]=2$. Il est désormais en C .
S'il se déplace dans le sens indirect, alors $Ti[pos]=Ti[1]=0$. Il est arrivé en A .
- Si le mobile est en C , à savoir $pos=2$ et qu'il se déplace dans le sens trigonométrique, alors $Td[pos]=Td[2]=0$. Il est désormais en A .
S'il se déplace dans le sens indirect, alors $Ti[pos]=Ti[2]=1$. Il est arrivé en B .

Conclusion : $Td[pos]$ retourne la nouvelle position occupée à partir de pos si le déplacement a lieu dans le sens trigonométrique et $Ti[pos]$ retourne la nouvelle position en cas de déplacement indirect.

2. Écrivons une fonction `deplacement(p, q, n)` qui retourne sous forme d'un entier compris entre 0 et 2 la position du mobile à l'instant $t = n$ (en supposant toujours qu'il part de A) et affiche à l'écran la phrase : « le mobile est en ... à l'instant $t = n$ » :

On va exploiter les listes Td et Ti introduite à la question précédente.

On fait se déplacer le mobile n fois et pour ça on utilise une boucle « Pour » avec k allant de 0 à $n - 1$ et à chaque passage dans la boucle, on choisit si le mobile se déplace dans le sens trigonométrique (probabilité p), dans le sens indirect (probabilité q) ou reste sur place (probabilité r).

On rappelle que $p + q + r = 1$.

Il suffit donc de faire `deplacement = rdm.random()` pour retourner un réel au hasard pris entre 0 et 1 selon une loi uniforme.

Alors $\mathbb{P}(\text{deplacement} \leq p) = p$, $\mathbb{P}(p < \text{deplacement} \leq p + q) = q$ et $\mathbb{P}(p + q < \text{deplacement}) = r$.

Dès lors, en exploitant la réponse à la question II.1., on peut écrire :

```
def deplacement(p,q,n):
    pos = 0 # position initiale du mobile
    for k in range(n):
        deplacement = rdm.random()
        if deplacement <= p: # sens trigo
            pos = Td[pos]
        elif deplacement <= p+q: # sens inverse du sens trigo
            pos = Ti[pos]
    if pos == 0:
        print("le mobile est en A")
    elif pos == 1:
        print("le mobile est en B")
    else:
        print("le mobile est en C")
    return pos
```

3. Écrivons une fonction `arriveEnC(p, q)` qui retourne le nombre de pas nécessaire pour rejoindre le

point C : Il suffit de reprendre le programme précédent mais en remplaçant la boucle « Pour » par une boucle « Tant que » jusqu'à ce que le point *C* soit atteint...

Soit :

```
def arriveEnC(p,q):
    pos = 0
    k = 0
    while pos != 2:
        deplacement = rdm.random()
        if deplacement <=p:
            pos = Td[pos]
        elif deplacement <= p+q:
            pos = Ti[pos]
        k += 1
    return k
```

Comment estimer l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre de pas pour atteindre C ? Il suffit de retourner :

```
np.mean([arriveEnC(p,q) for k in range(m)])
```

4. Écrivons une fonction `estimProba(m,n)` permettant d'estimer la probabilité d'être respectivement en A , B et C à l'instant $t = n$ en retournant une liste $[pA,pB,pC]$ formée des fréquences respectives des positions A , B et C à l'issue de m répétitions de l'expérience :

Il suffit pour ça d'appeler un grand nombre m de fois la fonction `deplacement(p,q,n)` qui indique la position du mobile à l'instant $t = n$ (sans oublier de commenter tous les `print` car on n'a pas besoin de l'affichage de la position un millier de fois...)

Si les valeurs sont placées dans une liste (appelée L ci-dessous) alors il suffit d'appeler la méthode `count(i)` qui retourne le nombre de fois où l'entier i est présent dans la liste.

Soit :

```
def estimProba(p,q,n,m):
    L = [deplacement(p,q,n) for k in range(m)]
    return L.count(0)/m,L.count(1)/m,L.count(2)/m
```

III/ Etude du cas $p = q$ avec $p \in]0; \frac{1}{2}]$ et $r = 1 - 2p$

1. $X_{n+1} = M \cdot X_n, \forall n \in \mathbb{N}$ avec $M = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$ est la traduction matricielle du système obtenu en I.5),

à savoir :

$$\begin{cases} a_{n+1} = ra_n + qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + rb_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n + rc_n \end{cases}$$

2. Une matrice est dite stochastique si la somme des termes dans chacune de ses colonnes vaut 1.

a) Donnons un argument probabiliste qui justifie que M est une matrice stochastique :

On rappelle que, d'après la question I.5), la première colonne de la matrice désigne respectivement :

$$r = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}), p = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \text{ et } q = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})$$

donc, parce que les événements A_{n+1} , B_{n+1} et C_{n+1} sont incompatibles, on a :

$$r + p + q = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1} \cup B_{n+1} \cup C_{n+1})$$

Or $\{A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}\}$ est un système complet d'événements.

donc on retrouve bien de façon probabiliste le fait que $r + p + q = 1$. Il en est de même pour la somme des termes des colonnes 2 et 3.

b) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrons que leur produit est encore une matrice stochastique : Posons $C = A \cdot B = (c_{i,j})$.

Alors pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ fixé, la somme S_j des termes de la j -ième colonne de C vaut :

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{i=1}^3 c_{i,j} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 a_{i,k} b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^3 b_{k,j} \sum_{i=1}^3 a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^3 b_{k,j} \text{ car } \sum_{i=1}^3 a_{i,k} = 1 \text{ (somme des termes de la } k\text{-ième colonne de } A) \\ &= 1 \text{ car } \sum_{k=1}^3 b_{k,j} = 1 \text{ (somme des termes de la } j\text{-ième colonne de } B) \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des matrices stochastiques est stable par le produit matriciel.

3. Montrons que : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$:

Nous savons que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} = M \cdot X_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (cf. III.1)).

D'après l'égalité qui précède, on a : $X_1 = M \cdot X_0$

On suppose que $X_n = M^n \cdot X_0$ pour n fixé ($n \geq 0$)

Alors : $X_{n+1} = M \cdot X_n = M \cdot M^n \cdot X_0 = M^{n+1} \cdot X_0$

Conclusion : On a montré par récurrence : $X_n = M^n \cdot X_0, \forall n \in \mathbb{N}$

Rappelons que $a_0 = 1, a_1 = 0$ et $a_2 = 0$ pour conclure : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$

4. On considère le cas particulier pour lequel, si à l'instant n le mobile est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste avec une probabilité de $r = 1/2$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

Montrons que le problème 1 permet de déterminer les limites respectives des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

Il suffit de noter que dans ce cas : $r + p + q = r + 2p = 1 \Rightarrow p = 1/4 = q$ et donc :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice pour laquelle il s'agissait de calculer M^n de trois manières différentes dans le problème 1... Dès lors :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2/4^n \\ 1 - 1/4^n \\ 1 - 1/4^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4^n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n}.$$

Conclusion : le mobile sera de façon équiprobable en chacun des sommets du triangle lorsque n tend vers l'infini.

5. Au regard des hypothèses, on écrit désormais $M = \begin{pmatrix} 1-2p & p & p \\ p & 1-2p & p \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$.

a) $(M - \lambda I) \cdot X = 0$ n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée $M - \lambda I$ est non inversible. Autrement dit si et seulement si $\text{rg}(M - \lambda I) < 3$.

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - \lambda I) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 - \lambda - 2p & p & p \\ p & 1 - \lambda - 2p & p \\ p & p & 1 - \lambda - 2p \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} p & p & 1 - \lambda - 2p \\ p & 1 - \lambda - 2p & p \\ 1 - \lambda - 2p & p & p \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_3) \\ (L_2) \\ (L_1) \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} p & p & 1 - \lambda - 2p \\ 0 & 1 - \lambda - 3p & -(1 - \lambda - 3p) \\ 0 & -p(1 - \lambda - 3p) & (1 - \lambda - 3p)(\lambda - 1 + p) \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2 - L_1) \\ (pL_3 - (1 - \lambda - 2p)L_1) \end{matrix} \end{aligned}$$

Puisque $p^2 - (1 - \lambda - 2p)^2 = (p - 1 + \lambda + 2p)(p + 1 - \lambda - 2p)$ et le pivot $p \neq 0$...

$$\text{D'où } \text{rg}(M - \lambda I) = \text{rg} \begin{pmatrix} p & p & 1 - \lambda - 2p \\ 0 & 1 - \lambda - 3p & -(1 - \lambda - 3p) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 + pL_2) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } P(\lambda) &= (1 - \lambda - 3p)(\lambda - 1 + p) - p(1 - \lambda - 3p) \\ &= (1 - \lambda - 3p)(\lambda - 1 + p - p) = (1 - \lambda - 3p)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1 - 3p \end{aligned}$$

Conclusion : $(M - \lambda I)X = 0$ n'est pas de Cramer si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 1 - 3p$

b) Conformément à la demande de l'énoncé, on note désormais $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1 - 3p < 1$.
Résolvons le système associé à $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned} (M - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} px + py - 2pz = 0 \\ -3py + 3pz = 0 \end{cases}, p \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (S_1) est $\{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$

Résolvons le système associé à $\lambda_2 = 1 - 3p$:

$$\begin{aligned} (M - (1 - 3p)I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} px + py + pz = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}, p \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_{1-3p}) \text{ est } \{(-y-z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}}$

6. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice dont la première colonne est solution de (S_{λ_1}) et les deux dernières colonnes sont solutions de (S_{λ_2}) .

Montrons que P est inversible et calculer son inverse : Cette question a déjà été traitée dans le Problème 1 (!), question 3.b).

Conclusion : $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

7. Par le calcul, nous obtenons :

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3p & 0 \\ 0 & 0 & 1-3p \end{pmatrix}$$

8. Nous déduisons de la question précédente, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$$M = PM'P^{-1}$$

Par ailleurs, ar récurrence, on montre que pour tout entier naturel n : $M^n = P \cdot M'^n \cdot P^{-1}$.
En effet : $M^0 = I_3 = PM'^0P^{-1}$ et si au rang n on a $M^n = P \cdot M'^n \cdot P^{-1}$, alors :
 $M^{n+1} = M^n \cdot M = P \cdot M'^n \cdot P^{-1} \cdot P \cdot M' \cdot P^{-1} = P \cdot M'^n \cdot I \cdot M' \cdot P^{-1} = P \cdot M'^{n+1} \cdot P^{-1}$.

Conclusion : $\boxed{M^n = P \cdot M'^n \cdot P^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}}$

9. Nous savons que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} = M \cdot X_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (cf. 3.a)).

D'après l'égalité qui précède, on a : $X_1 = M \cdot X_0$

On suppose que $X_n = M^n \cdot X_0$ pour n fixé ($n \geq 0$)

Alors : $X_{n+1} = M \cdot X_n = M \cdot M^n \cdot X_0 = M^{n+1} \cdot X_0$

Conclusion : $\boxed{\text{On a montré par récurrence : } X_n = M^n \cdot X_0, \forall n \in \mathbb{N}}$

Rappelons que d'après III.3), $a_0 = 1, a_1 = 0$ et $a_2 = 0$ pour conclure : $\boxed{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}}$

Pour conclure, il s'agit de calculer M^n :

Par ailleurs, toujours par récurrence, $M^n = \text{diag}[1, (1-3p)^n, (1-3p)^n], \forall n \in \mathbb{N}$.

D'où :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-3p)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-3p)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-3p)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-3p)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ (1-3p)^n \\ (1-3p)^n \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1+2(1-3p)^n \\ 1-(1-3p)^n \\ 1-(1-3p)^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-3p)^n \\ b_n = c_n &= \frac{1-(1-3p)^n}{3} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

10. On note à nouveau que les trois suites tendent vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers l'infini, ce qui montre que, lorsque n tend vers l'infini, le mobile est sur chacun des sommets du triangle de façon équiprobable.

On le vérifiera aisément avec Python en exécutant par exemple :

`estimProba(1/5,1/5,100,1000)` qui retourne : (0.331, 0.346, 0.323)

FIN