Devoir surveillé : Probabilités et séries numériques

Problème 1 :

On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois qu'on obtient un résultat différent de six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsqu'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.

1. Pour k entier naturel non nul, soient A_k l'événement : « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé » et B_k l'événement : « obtenir le premier six au plus tard au k-ième lancer ».
   a) Soit S_k l'événement : « obtenir six au k-ième lancer ».
   Exprimer A_1 et plus généralement A_k pour $k \geq 2$ à l'aide des événements S_k.
   En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$.
   Vérifier que $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$.
   b) Montrer que la probabilité d'obtenir le premier six au plus tard au troisième lancer vaut :
   $$\mathbb{P}(B_3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$$
   c) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?
   d) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k$-ième lancer ?

2. On appelle B l'événement : « On a obtenu une boule blanche ».
   a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la k-ième fois ?
   b) En déduire $\mathbb{P}(B \cap A_k)$.
   c) On souhaite estimer la probabilité d'obtenir une boule blanche à l'issue de l'expérience décrite ci-dessus. Compléter la fonction `tiragesUrnes(tmax)` afin qu'elle retourne 1 si on obtient une boule blanche et 0 sinon (l'expérience pouvant se poursuivre indéfiniment, on décide d'arrêter les lancers de dé après l'obtention de `tmax` boules rouges dans l'urne). C'est cet entier `tmax` supposé grand qui est fourni en paramètre d'entrée.

```
def tiragesUrne2(tmax):
    succes = 0 # 0 si pas de blanche lors du tirage dans l'urne
    b = 1 # nombre de blanches au début
    r = ...
    Six = 0 # aucun six n'est encore obtenu
    while Six == ... and r ...:
       if rdm.randint(..,...) ....:
          Six = 1
       else:
          ...
    if Six == 1 and rdm.random() ...:
       succes = ...
    return succes
```

d) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `EstimeProbaBlanche` de paramètres `m` et `tmax` qui réalise m fois l'expérience et renvoie la proportion des expériences où une boule blanche a été obtenue.

e) On souhaite montrer que la série $\sum \frac{x^k}{k}$ converge et que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$

i. Montrer que $\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}dt$ et en déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt$

ii. Justifier que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt$.

iii. Conclure.

f) Calculer $\mathbb{P}(B)$ et la confronter à votre estimation obtenue en 2.d).

Problème 2 :

Une urne contient initialement deux boules blanches et deux boules noires.
Soit c un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :
- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche), ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : " Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ".
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

① a) Si $c = 0$, donner $X(\Omega)$ et montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$, $\forall k \in X(\Omega)$. Vérifier ce résultat.

b) Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ en fonction de c pour c quelconque.

② a) Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s. Cette fonction doit simuler l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égal à s. Elle doit renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.

b) Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience pour donner une estimation de $P(X = 0)$ pour $c = 1$, $c = 2$ et $c = 5$.

③ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}$.

④ On suppose dans cette question que $c = 1$.

a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

c) ✐ *Résultat admis : Théorème de* ***transfert***. Soit X une variable aléatoire discrète infinie et u est une fonction définie sur $X(\Omega)$ telle que $Y = u(X)$ est aussi une variable aléatoire discrète infinie. On dira que $Y = u(X)$ admet une espérance si la série $\sum u(n)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et, si c'est le cas,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(u(X)) = \sum_{n \in X(\Omega)} u(n)\mathbb{P}(X = n)$$

.

Démontrer à l'aide du théorème de transfert que la variable aléatoire $Y = X + 3$ admet une espérance, et calculer cette espérance. En déduire l'espérance de X.

d) Utiliser la fonction de la question 2(a) pour vérifier ce résultat à l'aide de simulations.

⑤ On suppose dans cette question que $c = 2$.

a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) Donner la loi de X. La variable X admet-elle une espérance ?

⑥ Dans cette question, c est un entier naturel non nul quelconque.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ -\ln\left(\mathbb{P}(E_n)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$.

b) Déterminer alors la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
On pourra pour cela utiliser, après l'avoir démontré, le résultat suivant : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ ont même nature.