5 T.D. Concepts de base des probabilités.

Les objectifs : Modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une probabilité ; calculer la probabilité d'un événement ; exploiter une hypothèse d'indépendance pour calculer des probabilités.

Exercice 1 ❤ : Obtention de formules combinatoires

I/ Formule de Pascal.

On suppose un ensemble E de cardinal n. Soit $a \in E$. On prélève p éléments de E. En mettant en évidence une partition de l'ensemble des tirages possibles, retrouver la formule de Pascal.

II/ Formule du binôme de Newton.

On considère une urne U composé de $N = a + b$ boules dont a sont blanches. On effectue n tirages successifs avec remise.

① Déterminer le cardinal des tirages possibles.

② Soit T_k l'événement : « k boules sont blanches parmi les n boules tirées ». Déterminer $\text{Card}(T_k)$ en précisant les valeurs de k.

③ Mettre en évidence une partition de Ω et conclure sur la formule du Binôme de Newton.

III/ Formule $\displaystyle\sum_{k=a}^{n} \binom{k}{a} = \binom{n+1}{a+1} = S$.

① *Démonstration analytique*. Utiliser la formule de Pascal et mettre en évidence un télescopage qui permet de retrouver ce résultat.

② *Démonstration combinatoire*. On considère une urne U contenant $n+1$ boules dont b sont noires et $a+1$ sont blanches. On extrait les boules une à une jusqu'à vider l'urne.

- **a.** Combien de tirages différents sont possibles ?
- **b.** Soit M_k l'événement : « La dernière boule blanche occupe la $(k+1)$-ième place ». Déterminer $\text{Card}(M_k)$ pour des valeurs de k qu'on précisera.
- **c.** En déduire la formule annoncée.

Exercice 2 ✶ :

On considère 5 pièces de monnaie : 3 parfaitement équilibrées, une donnant pile avec la probabilité $0,6$ et la dernière donnant pile avec la probabilité $0,7$.

① On tire au hasard l'une des 5 pièces et on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ? Comment interpréter ce résultat ?

② On tire au hasard l'une des 5 pièces et on la lance. On obtient face. Quelle est la probabilité que le lancer ait été effectué avec l'une des 2 pièces truquées ? Interpréter ce résultat.

✐ *Indications* : La réalisation des événements est conditionnée par le choix de l'une au l'autre des pièces de monnaies. Penser à décrire un système complet d'événements et à appliquer la formule des probabilités totales.

Exercice 3 ✶ :

Un bus est prévu tous les matins en direction du boulevard Guist'hau, destination appelée A. Si un matin donné, il est à l'heure, il a une chance sur 4 d'être à l'heure le lendemain. S'il est en retard un matin, il a 9 chances sur 10 d'être à l'heure le lendemain. Le premier jour, le bus est à l'heure.
Calculer la probabilité que le bus soit à l'heure le n-ième jour.
Que se passe-t-il au bout d'un an ?

✐ *Indication* : On fera intervenir un système complet d'événements de 2 possibilités contraires le n-ième jour et la formule des probabilités totales.

Exercice 4 ✶ ✶ :

On considère n urnes numérotées de 1 à n ($n \geq 1$). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne n°k contient k boules vertes et $n-k$ boules rouges.

① On choisit une urne au hasard puis on extrait une boule de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ?

② On choisit une urne au hasard puis on extrait deux boules sans remise de cette urne ($n \geq 2$). Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes ?

③ On choisit une urne au hasard puis on extrait deux boules avec remise de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes ?

Exercice 5 : ✶ ✶

On lance un dé jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou de 7 apparaisse.

① Soit E_n l'événement : « une somme de 5 apparaît au n-ième lancer et sur les $n-1$ premiers doubles lancers, ni la somme 5 ni celle de 7 n'apparaît ». Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.

② Déterminer la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 5.

③ Écrire une fonction Python simulant cette expérience aléatoire. En réalisant $s = 1000$ fois cette expérience, proposez une façon de valider votre réponse à la question précédente.

④ Déterminer la probabilité qu'on s'arrête sur une somme de 7.

⑤ Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais.

Exercice 6 : ✶✶

Des cavaliers, sur une épreuve de puissance, tentent de franchir des barres placées successivement sur les trous numérotés $1, 2, \cdots, n, \cdots$. On suppose les sauts indépendants entre eux et on suppose que la probabilité de succès à la hauteur $n \in \mathbb{N}^*$ est $\dfrac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec.
Soit X, la v.a.r. égale au numéro du dernier saut réussi.

① Trouver la loi de X.

② Écrire une fonction Python permettant de simuler les passages successifs d'un cavalier sur cette épreuve.

③ Calculer grâce à elle la hauteur moyenne franchie par les cavaliers.

④ On admet que $\mathbb{E}(X)$ existe si $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument et, sous cette condition $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ si elle existe.

Exercice 7 ✶✶✶ :

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
On admet que, pour justifier l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire dénombrable infinie X, il suffit de vérifier la convergence absolue de la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ et que sous cette condition, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k)$.

① Montrer que : $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X\le n) - \mathbb{P}(X \le n-1) = \mathbb{P}(X\ge n) - \mathbb{P}(X\ge n+1) =$

$$= \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X>n).$$

② **a.** Montrer que $\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X>n) - N\mathbb{P}(X>N)$ (✐ On pensera à des télescopages...)

b. En déduire que $\mathbb{E}(X)$ existe si, et seulement si, $\sum_{n\ge 0} \mathbb{P}(X>n)$ converge et que que, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>n)$.

③ *Application :* Un cinéma édite des tickets dont le verso représente quatre affiches de films possibles. En réunissant ces quatre affiches, on gagne une place gratuite (on supposera les distributions indépendantes).

a. Calculer la probabilité qu'au bout de n séances, il manque encore une affiche (on pourra introduire l'événement A_i : « ne pas obtenir l'affiche n°i au bout de n séances » et appliquer la formule du crible.

b. Soit X, variable aléatoire égale au nombre de films vus pour disposer pour la première fois de la collection complète. Exprimer $\mathbb{P}(X>n)$ à l'aide de 3.a). En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 8 ✶✶✶ :

Soit un nombre réel $p \in]0,1[$. On réalise une suite de lancers d'une pièce, chaque lancer amenant « pile » avec la probabilité p ou « face » avec la probabilité $q = 1-p$. Pour tout entier naturel k non nul, soit l'événement A_k : « on obtient pour la première fois Pile suivi de Face aux lancers k et $k+1$ ».

① Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$.

② A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\mathbb{P}(A_k) = q \cdot \mathbb{P}(A_{k-1}) + p^k q$.

③ En faisant intervenir la suite (u_k) définie, pour tout entier $k \geq 2$, par $u_k = \dfrac{\mathbb{P}(A_k)}{q^k}$, déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1.

④ Vérifier que les A_k forment un système quasi-complet d'événements.

Exercice 9 ✶✶✶ :

Deux joueurs E et F jouent à un jeu. Chacun dispose d'une urne contenant dix tickets. Dans l'urne de E, il y en a x qui sont gagnants ($x \geq 2$), dans celle de F, il y en a y.
E commence : il tire simultanément deux tickets de son urne; il gagne si les 2 sont gagnants. S'il ne gagne pas, c'est F qui joue, en tirant un ticket de son urne. F remporte la partie si ce ticket est gagnant. Sinon, c'est E qui reprend la main, et le jeu se poursuit selon les mêmes modalités jusqu'à l'obtention d'un gagnant.

① Simulation informatique.

- **a.** Écrire une fonction `tirageF(y)` simulant le tirage d'un ticket dans une urne contenant y tickets gagnants, $10 - y$ perdants, renvoyant 1 si le ticket est gagnant, 0 sinon.
  On pourra utiliser la bibliothèque `random` au sein de laquelle la fonction `randint(a,b)` renvoie un nombre entier aléatoire dans $[\![a, b]\!]$.
- **b.** Écrire de même une fonction `tirageE(x)` simulant un tirage de 2 tickets dans une urne contenant x tickets gagnants, $10-x$ perdants, renvoyant 1 si les 2 tickets tirés sont gagnant, 0 sinon.
- **c.** Écrire une fonction `jeu(x,y)` qui simule une partie complète, consistant en une suite d'essais de E et F jusqu'à l'obtention d'un vainqueur. Cette fonction renverra 1 si E est le gagnant, 2 si c'est F.

② Étude mathématique.

- **a.** Calculer la probabilité, que l'on notera p, que E gagne à son premier tirage.
  Calculer la probabilité, que l'on notera p', que F gagne à son premier tirage, sachant que E a perdu.
- **b.** Calculer la probabilité que la partie se termine avec le gain de E à son n-ième tirage.
  Montrer que la probabilité que E gagne la partie est $\dfrac{p}{1 - qq'}$, où $q = 1 - p$, $q' = 1 - p'$.
- **c.** Montrer que la probabilité que F gagne la partie est $\dfrac{p'q}{1 - qq'}$.
- **d.** Ecrire une fonction qui renvoie la liste des valeurs de x, x entier, $2 \leq x \leq 9$ pour lesquelles $f(x) = \dfrac{10x(x-1)}{90 + x - x^2}$ est entier.
- **e.** Montrer que pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que $y = f(x)$.
  En déduire le ou les couple(x) (x, y) pour lequel (lesquels) la partie est équitable.