

MATHEMATIQUES

Révisions d'analyse

Exercice :

Soit a un réel strictement supérieur à 0.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

① Étudions les variations de la suite (u_n) :

On note que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = a^n u_n$$

Comme $a > 0$, il suffit pour conclure d'étudier le signe de u_n pour avoir celui de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
Montrons par récurrence que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

- *initialisation* : $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ par hypothèse.
- On suppose que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ (récurrence sur **deux** rangs).
- *hérédité* : On sait que $u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n$.
or $a, u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$, donc $u_{n+2} > 0$.
- *conclusion* : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ - la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante

② $\forall a \in [1, +\infty[$, prouvons que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$:

On raisonne par l'absurde : Supposons que (u_n) converge vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^*$ (ce qui est nécessairement le cas puisque $u_0 > 0$ et (u_n) croissante).

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+2} - u_{n+1}) = L - L = 0 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \right) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Soit

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n) \cdot L$$

Or, par hypothèse, $a \geq 1$.

- Si $a = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$ et donc $0 = L$. Absurde car $L > 0$.
- Si $a > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ et donc $0 = \infty$. Absurde.

Conclusion : La suite (u_n) diverge si $a \geq 1$.

③ On suppose désormais que $a \in]0, 1[$.

a) Écrivons une fonction Python `calcul_U(a, n, u, v)` retournant la valeur de u_n pour les paramètres d'entrée qui sont respectivement le réel a , l'indice n du terme calculé et les valeurs réelles u et v des premiers termes u_0 et u_1 de la suite :

Il s'agit d'écrire une récurrence sur deux rangs.

Puisqu'on veut tracer le graphe des termes de la suite (u_n) à la question 3.b), on va d'ores et déjà créer la liste $LU = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ des termes successifs de la liste en ne retournant que le dernier d'entre eux, à savoir $LU[-1]$.

On initialisera cette liste en posant $LU = [u_0, u_1]$ qui sont fournis en paramètre d'entrée. Puis il nous restera à faire le calcul de u_2 à u_n grâce à une boucle pour dont l'indice varie de 2 à n .

Une rédaction possible est la suivante :

```
def calcul_U(a,n,u,v):
    LU = [u,v]
    for k in range(2,n+1):
        c = v + a**(k-2)*u
        LU.append(c)
        u,v = v,c
    return LU[-1]
```

✍ *N.B.* : On ne demande pas de retourner la liste $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ mais bien u_n .

b) Écrivons une fonction **Graphe_U(a,n,u,v)** permettant de visualiser les variations de la suite (u_n) de u_0 à u_n :

On utilise la fonction précédente, **sauf** qu'on retourne LU et plus seulement $LU[-1]$.

Dès lors pour avoir une représentation graphique des termes de la suite sous forme de points rouges reliés par des lignes en pointillées, on pourra écrire :

```
def Graphe_U(a,n,u,v):
    LU = calcul_U(a,n,u,v)
    I = np.arange(n+1)
    plt.plot(I,LU,'ro-.')
    plt.show()
```

c) Montrons que pour tout entier naturel non nul : $u_{n+2} \leq u_{n+1}(1 + a^n)$:
 (u_n) est croissante donc $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq u_{n+1}(1 + a^n)$

d) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, 1 + x \leq e^x$:

– On peut étudier la fonction $g : x \mapsto e^x - x - 1$ et montrer grâce à son tableau de variation qu'elle est positive sur \mathbb{R}_+ .

– On peut aussi appliquer le théorème des accroissements finis. Voici comment :
 On dit que la fonction exp est de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle $[0, x]$ où $x > 0$.
 Dès lors : $\exists c \in]0, x[/ e^x - 1 = e^c \cdot x$.

Or

$$0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c \Rightarrow x < e^c \cdot x$$

Conclusion : $e^x - 1 > x, \forall x > 0$. On a l'égalité si $x = 0$.

e) On en déduit la convergence de la suite (u_n) :

En utilisant 3.c) et 3.d), on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leq 1 + a^n \leq e^{a^n}$$

Dès lors, par télescopes :

$$\prod_{k=1}^n \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \leq \prod_{k=1}^n e^{a^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n a^k\right)$$

ou encore, en posant $S_n = \sum_{k=1}^n a^k$:

$$\frac{u_{n+2}}{u_2} \leq e^{S_n} \Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_2 \cdot e^{S_n}$$

mais

$$S_n = \sum_{k=1}^n a^k = a \frac{1 - a^n}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a} \text{ car } 0 < a < 1$$

Donc

$$\forall n \geq 1, u_{n+2} \leq u_2 e^{\frac{a}{1-a}}$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée. D'où, par application du théorème de la limite monotone :

Conclusion : La suite (u_n) converge.

Problème : G2E 2010

Lu dans le rapport de jury : « Le minimum sur les suites récurrentes n'est guère connu : sens de variation, majoration ou minoration par un nombre fixe, détermination de la limite obtenue par le point fixe de la fonction f .

Une suite majorée par 1 et croissante ne converge pas nécessairement vers 1. Deux suites l'une décroissante, l'autre croissante, ne sont adjacentes que si leur différence tend vers 0. »

Soit t un réel strictement positif.

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

1. a) *Etudions le signe de g :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}).$$

Or, si $0 < x < 1$, $\sqrt{x} < 1$ et si $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$.

Conclusion : $g(x) > 0$ si $x \in]0, 1[$, $g(x) < 0$ si $x \in]1, +\infty[$ et $g(x) = 0$ si $x = 0$ ou $x = 1$

Lu dans le rapport de jury : « Beaucoup de candidats trouvent que g est négative sur \mathbb{R} . La plupart des réponses manquent de concision. Citons par exemple l'étude de la limite en $+\infty$ de la fonction g qui n'a aucun intérêt par rapport à la question posée. Trop de candidats donnent comme réponse le tableau de variation de g et semblent avoir oublié en cours de travail que c'est le signe qui devait être étudié. »

b) *Montrons que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$:* Supposons que $t \geq 1$ et démontrons par récurrence que la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

i. *Initialisation :* Pour $n = 0$, $x_0 = t \geq 1$ donc $x_1 = \sqrt{x_0} \geq 1$.

Par ailleurs : $x_1 - x_0 = \sqrt{x_0} - x_0 = g(x_0) \leq 0$ d'après 1.a).

D'où $1 \leq x_1 \leq x_0$: \mathcal{P}_0 est vraie.

ii. *Hypothèse :* On suppose que \mathcal{P}_n est vraie pour n fixé ($n \geq 0$).

iii. *Hérédité :* $x_{n+1} \geq 1$ donc $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} \geq 1$.

Par ailleurs, $x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) \leq 0$ car $x_{n+1} \geq 1$.

Donc \mathcal{P}_{n+1} : $1 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}$ est vraie.

iv. **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$

On en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, minorée par 1.

Conclusion : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Déterminons sa limite qu'on note l : On a $x_{n+1} = \sqrt{x_n} \forall n \in \mathbb{N}$. Donc en passant à la limite en l'infini et en utilisant la continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}_+ , on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = l = \sqrt{l}$$

Or

$$l = \sqrt{l} \Leftrightarrow (l^2 = l \text{ et } l \geq 0) \Leftrightarrow (l = 0 \text{ ou } l = 1).$$

Par ailleurs la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1 donc $l = 0$ est impossible.

Conclusion : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = 1$.

c) *Etudions $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$: On rédige cette fois plus rapidement.*

On commence par noter que si $0 < x_0 = t < 1$ alors $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Ce qui est évident par récurrence puisque si $x \in]0, 1[$, alors $\sqrt{x} \in]0, 1[$.

L'intervalle $I =]0, 1[$ est dit stable par $x \mapsto \sqrt{x}$.

Par ailleurs cette fonction est strictement croissante sur I donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Elle est par ailleurs bornée par 0 et 1 donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour déterminer sa limite, il suffit de savoir si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît ou décroît... c'est justement ce que nous donne la question 1.a).

En effet, $x_n \in]0, 1[$ donc $g(x_n) = \sqrt{x_n} - x_n > 0$. Autrement dit :

$$x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

On en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et d'après la question précédente on conclut que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Lu dans le rapport de jury : « Questions très diversement traitées. Les meilleurs font une récurrence, utilisent l'étude de g pour l'initialisation, la croissance de la fonction racine pour l'hérédité et citent la continuité de cette même fonction pour conclure sur la valeur de la limite de la suite (x_n) . Beaucoup de candidats semblent croire qu'une suite croissante et majorée par 1 converge vers 1. »

On considère maintenant les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n} \right) = \frac{u_n}{x_n}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_n - 1) = 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_{n+1}^2 - 1) \\ &= 2^n(-x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - 1) = -2^n(x_{n+1} - 1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Lu dans le rapport de jury : « Beaucoup de candidats étudient le discriminant de l'expression $-x^2 + 2x - 1$ pour déterminer son signe ».

3. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2^{n+1} \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n \frac{x_n - 1}{x_n} = 2^{n+1} \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} - 2^n \frac{x_{n+1}^2 - 1}{x_{n+1}^2} \\ &= \frac{2^n}{x_{n+1}^2} (2x_{n+1}(x_{n+1} - 1) - (x_{n+1}^2 - 1)) = \frac{2^n}{x_{n+1}^2} (x_{n+1} - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Lu dans le rapport de jury : « Certains candidats croient que la suite (u_n) est positive et essaient de conclure en utilisant que x_n est plus grande que 1, ce qui est faux pour $t < 1$ ».

$$4. \forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = 2^n(x_n - 1) - 2^n \frac{x_n - 1}{x_n} = 2^n \frac{x_n^2 - 2x_n + 1}{x_n} = 2^n \frac{(x_n - 1)^2}{x_n} \geq 0.$$

5. Montrons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes :

On sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Il suffit donc de montrer qu'elle est minorée.

Or, d'après 4. on a : $u_n \geq v_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq v_0$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par v_0 .

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. (Théorème de la limite monotone).

Lu dans le rapport de jury : « Les résultats précédents ne permettent pas de dire que les suites sont adjacentes. Certains candidats veulent conclure en écrivant « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par v_n elle est donc convergente ». L'argument correct est « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par v_0 elle est donc convergente ».

De même, en notant que $v_n \leq u_n \forall n \in \mathbb{N}$ avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, on montre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par u_0 .

Conclusion : La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

6. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on notera L :

Rappelons que l'énoncé nous indique que $v_n = \frac{u_n}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ d'après la question 1. et ce pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

Donc si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même limite notée L .

Lu dans le rapport de jury : « On voit parfois que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 2^n ou plus souvent 0 car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite 1 ».

7. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et toutes deux ont pour limite L .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq L \leq u_n$.

En particulier, pour $n = 0$, on a : $v_0 \leq L \leq u_0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x_0} \leq L \leq x_0 - 1$, avec $x_0 = t$.

Conclusion : $1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1$

Lu dans le rapport de jury : « Question souvent bien traitée ».

L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0 , c'est-à-dire de t . Nous considérons donc désormais la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(t) = L$.

8. Écrivons une fonction Python `estimef(t)` qui retourne une valeur approchée à 10^{-3} près de L pour tout valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$:

Nous avons besoin, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$, de déterminer à 10^{-3} près $L = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Pour chaque valeur de t , nous allons donc construire par récurrence une valeur approchée de L en utilisant les définitions des suites (x_n) , (u_n) et (v_n) .

Nous commençons par initialiser x_0 à t , u_0 à $2^0(x_0 - 1) = t - 1$ et v_0 à $u_0/x_0 = u_0/t$.

Le nombre de répétition n'étant pas connu, nous répéterons le calcul de chacun de ces termes tant que $u_n - v_n > 1e - 3$.

Dès que $u_n - v_n \leq 1e - 3$ nous retournerons $(u_n + v_n)/2$ comme valeur approchée de L .

Une écriture possible de la fonction demandée est donc :

```
from math import *

def estimf(t):
    n = 0
    x = t
    u,v = t-1,u/t
    while u-v > 1e-3: # on rappelle que :  $v_n < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ 
        n += 1
        x = sqrt(x)
        u = 2**n*(x-1)
        v = u/x
    return (u+v)/2
```

Pour donner une représentation graphique de f , on importera la bibliothèque `matplotlib.pyplot` ainsi que la bibliothèque `numpy` et on écrira :

```
T = np.linspace(0.5,5,100)
Y = [estimef(t) for t in T] # liste avec les valeurs de f(t)
plt.plot(T,Y,'r-')
```

Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t .

9. Il suffit de considérer l'inégalité obtenue en 7 en prenant $t = 1$. Alors $\boxed{f(1) = 0}$.

Lu dans le rapport de jury : « Question souvent bien traitée ».

10. L'encadrement obtenu en 7. s'écrit désormais $1 - \frac{1}{t} \leq f(t) \leq t - 1$ ou encore $\frac{t-1}{t} \leq f(t) \leq t-1$.

Pour obtenir un encadrement de $\frac{f(t)}{t-1}$, il reste à diviser par $t-1 \neq 0$:

– Si $t-1 > 0 \Leftrightarrow t > 1$ alors : $\frac{1}{t} \leq \frac{f(t)}{t-1} \leq 1$

– Si $t-1 < 0 \Leftrightarrow t < 1$, alors $1 \leq \frac{f(t)}{t-1} \leq \frac{1}{t}$

Par théorème d'encadrement des limites, on obtient : $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t-1} = 1$

On rappelant que $f(1) = 0$ d'après 8., cette limite s'écrit : $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = 1$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1) = 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « L'immense majorité des candidats pense à utiliser le théorème d'encadrement des limites mais oublie de séparer les cas $t > 1$ et $t < 1$ ».

11. a) On suppose $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons par récurrence que $\mathcal{R}_n : x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$:

- i. *Initialisation* : \mathcal{R}_0 est vraie car, par hypothèse, $x_0(t_1 \cdot t_2) = t_1 \cdot t_2$ et $x_0(t_1) \cdot x_0(t_2) = t_1 \cdot t_2$
- ii. *Hypothèse* : supposons \mathcal{R}_n vraie pour n fixé.
- iii. *Hérédité* : $x_{n+1}(t_1 \cdot t_2) = \sqrt{x_n(t_1 \cdot t_2)}$
 et $x_{n+1}(t_1) \cdot x_{n+1}(t_2) = \sqrt{x_n(t_1)} \cdot \sqrt{x_n(t_2)} = \sqrt{x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)}$
 Donc, par hypothèse de récurrence, $x_{n+1}(t_1 \cdot t_2) = x_{n+1}(t_1) \cdot x_{n+1}(t_2)$
- iv. **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)$

Lu dans le rapport de jury : « Certains candidats ne voient pas qu'il faut faire une récurrence. »

- b) On revient à la définition de $u_n(t)$:

$$\begin{aligned} u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) &= 2^n (x_n(t_1 \cdot t_2) - 1) - 2^n (x_n(t_1) - 1) - 2^n (x_n(t_2) - 1) \\ &= 2^n (x_n(t_1 \cdot t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1) \\ &= 2^n (x_n(t_1) \cdot x_n(t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1) \\ &= 2^n (x_n(t_1) - 1) \cdot (x_n(t_2) - 1) \\ &= 2^n \frac{u_n(t_1)}{2^n} \cdot \frac{u_n(t_2)}{2^n} = \frac{u_n(t_1) \cdot u_n(t_2)}{2^n} \end{aligned}$$

Or on a vu en 5. que les suites $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent pour toutes valeurs de t dans \mathbb{R}_+ .

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)) = 0$

Lu dans le rapport de jury : « Rarement bien traitée, principalement parce que la forme indéterminée $2^n x_n$ n'est pas vue. »

- c) Par définition de $f : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t_1 \cdot t_2) = f(t_1 \cdot t_2)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t_1) = f(t_1)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t_2) = f(t_2)$.

Conclusion : $f(t_1 \cdot t_2) = f(t_1) + f(t_2)$.

12. a) Utilisons l'égalité qui précède en notant que si $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+$, alors $1 + \frac{h}{t} \in \mathbb{R}_+$ et :

$$f(t) + f\left(1 + \frac{h}{t}\right) = f\left(t \cdot \left(1 + \frac{h}{t}\right)\right) = f(t + h)$$

Conclusion : $f(t + h) - f(t) = f\left(1 + \frac{h}{t}\right)$

Lu dans le rapport de jury : « Assez peu traitée ».

- b) Nous savons que $f(1) = 0$ d'après 8. et $f'(1) = 1$ d'après 9. f est dérivable en 1 et à ce titre elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 qui vaut :

$$f(x) \underset{1}{=} f(1) + (x - 1)f'(1) + o(x - 1) \underset{1}{=} x - 1 + o(x - 1)$$

En posant $x = 1 + \frac{h}{t}$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et h au voisinage de 0, on a $1 + \frac{h}{t}$ au voisinage de 0 et :

$$f\left(1 + \frac{h}{t}\right) \underset{0}{=} \frac{h}{t} + o(h)$$

En utilisant la relation obtenue en 12.a) on en déduit :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \underset{0}{=} \frac{1}{t} + o(1)$$

Conclusion : f est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $f'(t) = \frac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$

c) D'après ce qui précède, on en déduit que f est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Donc $\exists c \in \mathbb{R} / f(t) = \ln t + c, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$.

Or on rappelle que $f(1) = 0$ (question 8.) donc $c = 0$

Conclusion : f est la fonction \ln

13. On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ avec $x_0 = t$.

On a : $x_1 = \sqrt{t} = t^{1/2}, x_2 = \sqrt{x_1} = t^{1/4}$.

Par récurrence, on montre facilement que $x_n(t) = t^{\frac{1}{2^n}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a donc $u_n(t) = 2^n \left(t^{\frac{1}{2^n}} - 1 \right) = 2^n \left(e^{\frac{\ln t}{2^n}} - 1 \right), \forall n \in \mathbb{N}$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{2^n} = 0$ donc, par utilisation des équivalents : $u_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n \frac{\ln t}{2^n} = \ln t$

Conclusion : $f(t) = \ln t, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$

Lu dans le rapport de jury : « Seuls les meilleurs candidats ont traité cette question ».