# Bilan de BCPST1

## 1 Manipulations élémentaires avec Python :

1. On considère la liste `L1 = [1,3,'cinq',7,'neuf',11]`.
   Comment, avec une commande Python et le seul recours à `L1`, pouvez-vous :
   a) Obtenir le nombre d'éléments dans `L1` : `len(L1)`
   b) afficher l'entier `7` : `L1[3]` ou `print(L1[3])`
   c) afficher le `f` de `'neuf'` : `L1[4][3]` ou `L1[4][-1]`
   d) savoir si l'entier `9` est dans `L1` : `9 in L1`
   e) compléter la liste pour qu'elle devienne : `[1,3,'cinq',7,'neuf',11,13]` (on donnera deux méthodes possibles) :

   `L1.append(13)` ou `L1+[13]`

   ✐ Attention à la différence entre les deux. Dans le 1er cas, `L1` est modifiée. Ce n'est pas le cas dans le deuxième cas pour laquelle je recommande de créer une nouvelle liste en écrivant : `L2 = L1+[13]`
   f) Compter le nombre de `7` dans la liste : `L1.count(7)`

2. Créer la liste `L2 = [1,4,9,16,25, ...,100]` : `L2 = [k**2 for k in range(1,11)]`

3. On suppose avoir importé la bibliothèque `numpy` grâce à la commande `import numpy as np`.
   Que fait :
   a) `np.arange(10)` ? `array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])`
   b) `np.arange(1,10)` ? `array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])`
   c) `np.arange(1,10,2)` ? `array([1, 3, 5, 7, 9])`
   ✐ *Remarque :* Les trois précédents tableaux sont formés d'entiers.

   d) `np.linspace(1,10,10)` ? `array([ 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10.])`
   ✐ *Remarque :* Le tableau précédent est formé de réels (`numpy.float`)

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

   a) La bibliothèque `numpy` étant supposée importée, comment créez-vous la matrice `M` ?

   `M = np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])`

   b) Par quelle commande récupérez-vous le `5` au centre de la matrice ? `M[1,1]`
   c) Écrire la commande qui permet d'obtenir la première ligne de cette matrice : `M[0,:]`
   d) Écrire la commande qui permet d'obtenir la deuxième colonne de cette matrice : `M[:,1]`
   e) Quelle commande permet de savoir si cette matrice est inversible ?

   `np.linalg.matrix_rank(M)==3`

La réponse est ici `False` car le rang de $M$ est de 2.
Cette matrice **n'est pas** inversible. Il suffit pour s'en convaincre de calculer son rang par la méthode du pivot de gauss de la manière suivante :

$$\text{rg}(M) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L1} \\ L2 - 4L1 \\ L3 - 7L1 \end{matrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L1} \\ \text{-L2/3} \\ \text{L3-2L2} \end{matrix} = 2$$

## 2 Suites numériques :

1. Exprimer en fonction de $n$ le terme général des suites $(u_n)$ définies par leur premier terme et une relation de récurrence et indiquer leur nature :

   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2,\ u_0 = 1\,;$
   C'est une suite arithmétique. On a immédiatement : $\boxed{u_n = u_0 + 2n = 1 + 2n}$ ; Cette suite diverge.

   b) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n/3,\ v_1 = 2\,;$

   Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 1/3$. D'où $\boxed{v_n = q^{n-1}v_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 2 = \frac{2}{3^{n-1}}}$

   c) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = -w_n/2 + 3,\ w_0 = 5\,;$
   Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique dont le point fixe vaut : $l = -l/2+3 \Leftrightarrow l = 2$.
   Soit $\boxed{w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 3 + 2}$

   d) $s_{n+2} = 7s_{n+1} - 10s_n$ et $s_0 = -1,\ s_1 = 3$.
   On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :
   (Ec) $r^2 - 7r + 10 = 0$ qui possède deux racines réelles $r_1 = 2$ et $r_2 = 5$.
   Dès lors : $\exists A, B \in \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n$.
   Si on ajoute que $s_0 = -1$ et $s_1 = 3$ alors on obtient le système :
   $$\begin{cases} A + B & = u_0 = -1 \\ 2A + 5B & = u_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A = -\frac{8}{3} \text{ et } B = \frac{5}{3}$$
   ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \frac{1}{3}(-2^{n+3} + 5^{n+1})}$

   e) $t_{n+2} = 6t_{n+1} - 9t_n$ et $t_0 = 5,\ t_1 = -2$.
   A nouveau une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :
   (Ec) $r^2 - 6r + 9 = 0$ qui possède une racine double $r_0 = 3$.
   Dès lors, $\exists A, B \in \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = (An + B) \cdot 3^n$.
   En utilisant les valeurs de $t_0$ et $t_1$, on obtient par résolution de système $A = -17/3$ et $B = 5$.
   ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \left(-\frac{17}{3}n + 5\right) \cdot 3^n}$

2. *Écrivons une ligne de commande Python permettant de calculer la liste* `LU` *des 20 premiers termes de la suite* $(w_n)_{n \geq 0}$ *:*

– *Première rédaction (forme récurrente)* :

```
def suiteW():
    w0 = 5
    LW = [w0]
    for k in range(1,20): # k va de 1 à 99
       w = -w0/2+3
       LW.append(w)
       w0 = w
    return LW
```

– *Seconde rédaction (forme explicite)* :

```
def suiteW2():
    return [3*(-1/2)**n+2 for n in range(20)]
```

3. On suppose avoir importé les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot`.
Écrire deux à trois lignes de commande n'utilisant que les fonctions `np.arange` et `plt.plot` et permettant de visualiser à l'écran l'évolution des termes de cette suite. Que devrait-on observer ?

```
LW = suiteW2() # On calcule les termes de la suite de w0 à w19
A = np.arange(20) # On créé la liste des abscisses, soit A = [0,1,2,...,19]
plt.plot(A,LW,'ro') # On trace avec des ronds rouges...
```

Au regard de la forme explicite, comme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ on doit avoir $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 2}$

## Fonctions d'une variable réelle

. Soit $f$ définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

① *Donnons l'ensemble de définition de $f$ et de dérivabilité de $f$ :*
Pour l'ensemble de définition :

$$\frac{1-x}{1+x} \geq 0 \Leftrightarrow 1+x \neq 0 \text{ et } (1-x)(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1 \text{ (tableau de signe)}$$

***Conclusion*** : $\boxed{D_f = ]-1,1]}$.
Pour l'ensemble de dérivabilité, on rappelle que la fonction « racine carrée » n'est pas dérivable en 0 et donc $f$ n'est pas dérivable en $x = 1$.
***Conclusion*** : $\boxed{D_{f'} = ]-1,1[}$

② *Les bibliothèques **`numpy`** et **`matplotlib.pyplot`** ayant été importées, donnons le moyen de représenter le graphe de $f$ sur son ensemble de dérivabilité :*
On pourra se contenter de faire :

```
X = np.linspace(-0.9,0.99,100)
f = lambda x:x*np.sqrt((1-x)/(1+x))
```

```
plt.plot(X,f(X),'r-')
```

③ *Calculons la dérivée de $f$ et dresser son tableau de variation :*

Un calcul rapide donne : $\forall x \in ]-1,1[,\ f'(x) = \dfrac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

Pour l'étude de signe, sur $]-1,1[$, $(1+x)\sqrt{1-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $1-x-x^2$.

$$1-x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Dès lors, $1-x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$.

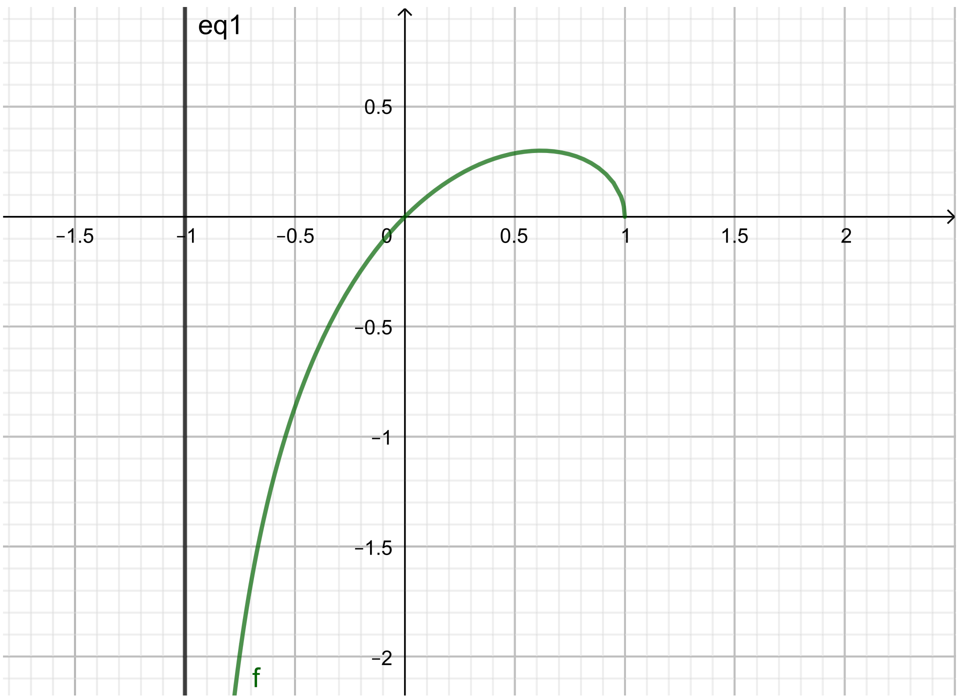
On note alors que $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ n'est pas dans l'ensemble de définition de $f'$ car :

$$4 < 5 < 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow -4 < -1-\sqrt{5} < -3 \text{ et donc } x_1 < -3/2$$

En revanche, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in ]-1,1[$ puisque $1 < -1+\sqrt{5} < 2$...

***Conclusion*** : $\boxed{f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-1, x_2] \text{ et } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]x_2, 1[}$

④ Donner l'allure de la fonction. ✐ *Remarque :* On prendra soin à indiquer la tangente verticale en $x = 1$ et à mettre en évidence l'asymptote verticale d'équation $x = -1$.



## Algèbre linéaire

On considère deux applications $f_1$ et $f_2$ définies toutes deux sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f_1(x,y,z) = (2x+y, x-z) \text{ et } f_2(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$$

① Dire si ces applications sont linéaires ? Le prouver pour l'une d'entre elle. Sont-elles des endomorphismes ?

a) $f_1$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Ce n'est pas un endomorphisme.
La démonstration de sa linéarité se fait en écrivant :
$\forall u = (x,y,z), v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= (2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), \alpha x + \beta x' - (\alpha z + \beta z')) \\ &= (\alpha(2x+y) + \beta(2x'+y'), \alpha(x-z) + \beta(x'-z')) \\ &\alpha(2x+y, x-z) + \beta(2x'+y', x'-z') = \alpha f_1(u) + \beta f_1(v) \end{aligned}$$

***Conclusion*** : $\boxed{f_1 \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}^3 \text{ dans } \mathbb{R}^2}$.

✐ La preuve de linéarité repose sur le même principe pour $f_2$. En revanche,

$$\forall u \in \mathbb{R}^3,\ f_2(u) \in \mathbb{R}^3.$$

***Conclusion*** : $\boxed{f_2 \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$

② *Déterminons leur noyau :*

– *Noyau de $f_1$ :*

$$(x,y,z) \in \ker f_1 \Leftrightarrow f_1(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y &= 0 \\ x-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= -2z \end{cases}, z \in \mathbb{R}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\ker f_1 = \{(z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\} \text{ ou encore } \ker f_1 = \text{Vect}\{(1,-2,1)\}}$

– *Noyau de $f_2$ :*

$$(x,y,z) \in \ker f_2 \Leftrightarrow f_1(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y &= 0 \\ y-z &= 0 \\ z-x &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z,\ z \in \mathbb{R}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\ker f_2 = \{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\} \text{ ou encore } \ker f_1 = \text{Vect}\{(1,1,1)\}}$

③ Dire pour chacune d'entre elle si elle est injective, surjective ou bijective :
Leur noyau respectif n'étant par réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, elles ne sont pas injectives.
Pour $f_2$ la non surjectivité et la non bijectivité est immédiate puisque c'est un endomorphisme...
En revanche, pour $f_1$, on pourra déterminer la dimension de l'image grâce à la formule du rang qui assure que :

$$\dim(\text{Im} f_2) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f_2) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

Or $\text{Im} f_2 \subset \mathbb{R}^2$ donc $\boxed{\text{Im} f_2 = \mathbb{R}^2}$

***Conclusion*** : $\boxed{f_1 \text{ est non injective et surjective, } f_2 \text{ est ni injective, ni surjective}}$