MATHEMATIQUES
Révisions d'analyse

Exercice :

Soit a un réel strictement supérieur à 0.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

① *Étudions les variations de la suite (u_n) :*
On note que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = a^n u_n$$

Comme $a > 0$, il suffit pour conclure d'étudier le signe de u_n pour avoir celui de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
Montrons par récurrence que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- *initialisation :* $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ par hypothèse.
- On suppose que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ (récurrence sur **deux** rangs).
- *hérédité :* On sait que $u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n$.
  or $a, u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$, donc $u_{n+2} > 0$.
- *conclusion :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} > 0 \text{ - la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

② $\forall a \in [1, +\infty[$, *prouvons que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *:*
On raisonne par l'absurde : Supposons que (u_n) converge vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^*$ (ce qui est nécessairement le cas puisque $u_0 > 0$ et (un) croissante).
Alors

$$\lim_{n\to\infty} (u_{n+2} - u_{n+1}) = L - L = 0 = \left(\lim_{n\to\infty} a^n\right) \lim_{n\to\infty} u_n$$

Soit

$$0 = \lim_{n\to\infty} (a^n) \cdot L$$

Or, par hypothèse, $a \geq 1$.

- Si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$ et donc $0 = L$. Absurde car $L > 0$.
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ et donc $0 = \infty$. Absurde.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ diverge si } a \geq 1}$.

③ On suppose désormais que $a \in]0, 1[$.

a) *Écrivons une fonction Python* `calcul_U(a,n,u,v)` *retournant la valeur de u_n pour les paramètres d'entrée qui sont respectivement le réel a, l'indice n du terme calculé et les valeurs réelles u et v des premiers termes u_0 et u_1 de la suite :*
Il s'agit d'écrire une récurrence sur deux rangs.

Puisqu'on veut tracer le graphe des termes de la suite (u_n) à la question 3.b), on va d'ores et déjà créer la liste `LU = [u0,u1,...,un]` des termes successifs de la liste en ne retournant que le dernier d'entre eux, à savoir `LU[-1]`.
On initialisera cette liste en posant `LU = [u0,u1]` qui sont fournis en paramètre d'entrée.
Puis il nous restera à faire le calcul de `u2` à `un` grâce à une boucle pour dont l'indice varie de 2 à n.

Une rédaction possible est la suivante :

```
def calcul_U(a,n,u,v):
    LU = [u,v]
    for k in range(2,n+1):
       c = v + a**(k-2)*u
       LU.append(c)
       u,v = v,c
    return LU[-1]
```

✐ *N.B.* : On ne demande pas de retourner la liste `[u0,u1,...,un]` mais bien `un`.

b) *Écrivons une fonction* ***`Graphe_U(a,n,u,v)`*** *permettant de visualiser les variations de la suite (u_n) de u_0 à u_n :*
On utilise la fonction précédente, **sauf** qu'on retourne `LU` et plus seulement `LU[-1]`.

Dès lors pour avoir une représentation graphique des termes de la suite sous forme de points rouges reliés par des lignes en pointillées, on pourra écrire :

```
def Graphe_U(a,n,u,v):
   LU = calcul_U(a,n,u,v)
   I = np.arange(n+1)
   plt.plot(I,LU,'ro-.')
   plt.show()
```

c) *Montrons que pour tout entier naturel non nul : $u_{n+2} \leq u_{n+1}(1 + a^n)$:*
(u_n) est croissante donc $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \geq 1$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leq u_{n+1}(1 + a^n)}$

d) *Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x \leq e^x$:*

– On peut étudier la fonction $g : x \longmapsto e^x - x - 1$ et montrer grâce à son tableau de variation qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

– On peut aussi appliquer le théorème des accroissements finis. Voici comment :
On dit que la fonction *exp* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[0, x]$ où $x > 0$.
Dès lors : $\exists c \in]0, x[/ e^x - 1 = e^c \cdot x$.
Or
$$0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c \Rightarrow x < e^c \cdot x$$
Conclusion : $\boxed{e^x - 1 > x,\ \forall x > 0. \text{ On a l'égalité si } x = 0}$.

e) *On en déduit la convergence de la suite (u_n) :*
En utilisant 3.c) et 3.d), on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leq 1 + a^n \leq e^{a^n}$$

Dès lors, par télescopages :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a^k} = exp\left(\sum_{k=1}^{n} a^k\right)$$

ou encore, en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k$:

$$\frac{u_{n+2}}{u_2} \leq e^{S_n} \Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_2 \cdot e^{S_n}$$

mais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k = a\frac{1-a^n}{1-a} \leq \frac{1}{1-a} \text{ car } 0 < a < 1$$

Donc

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+2} \leq u_2 e^{\frac{a}{1-a}}$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée. D'où, par application du théorème de la limite monotone :
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$.

Problème : G2E 2010

Lu dans le rapport de jury : « *Le minimum sur les suites récurrentes n'est guère connu : sens de variation, majoration ou minoration par un nombre fixe, détermination de la limite obtenue par le point fixe de la fonction f.*
Une suite majorée par 1 et croissante ne converge pas nécessairement vers 1. Deux suites l'une décroissante, l'autre croissante, ne sont adjacentes que si leur différence tend vers 0. »

Soit t un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

1. a) *Etudions le signe de g :*
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$.
Or, si $0 < x < 1$, $\sqrt{x} < 1$ et si $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$.

Conclusion : $\boxed{g(x) > 0 \text{ si } x \in]0,1[,\ g(x) < 0 \text{ si } x \in]1,+\infty[\text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1}$

Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de candidats trouvent que g est négative sur $\mathbb{R}$. La plupart des réponses manquent de concision. Citons par exemple l'étude de la limite en $+\infty$ de la fonction g qui n'a aucun intérêt par rapport à la question posée. Trop de candidats donnent comme réponse le tableau de variation de g et semblent avoir oublié en cours de travail que c'est le signe qui devait être étudié.* »

b) *Montrons que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$* : Supposons que $t \geq 1$ et démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

i. *Initialisation* : Pour $n = 0$, $x_0 = t \geq 1$ donc $x_1 = \sqrt{x_0} \geq 1$.
Par ailleurs : $x_1 - x_0 = \sqrt{x_0} - x_0 = g(x_0) \leq 0$ d'après 1.a).
D'où $1 \leq x_1 \leq x_0$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

ii. *Hypothèse* : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n fixé ($n \geq 0$).

iii. *Hérédité* : $x_{n+1} \geq 1$ donc $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} \geq 1$.
Par ailleurs, $x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) \leq 0$ car $x_{n+1} \geq 1$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$: $1 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}$ est vraie.

iv. ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n}$

On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, minorée par 1.
Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

Déterminons sa limite qu'on note l : On a $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc en passant à la limite en l'infini et en utilisant la continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\underset{n\to\infty}{lim}\, x_{n+1} = l = \sqrt{l}$$

Or

$$l = \sqrt{l} \Leftrightarrow (l^2 = l \text{ et } l \geq 0) \Leftrightarrow (l = 0 \text{ ou } l = 1).$$

Par ailleurs la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 donc $l = 0$ est impossible.

Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l = 1}$.

c) *Etudions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t<1$* : On rédige cette fois plus rapidement.
On commence par noter que si $0<x_0=t<1$ alors $0<x_n<1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ce qui est évident par récurrence puisque si $x\in]0,1[$, alors $\sqrt{x}\in]0,1[$.
L'intervalle $I=]0,1[$ est dit stable par $x\longmapsto\sqrt{x}$.
Par ailleurs cette fonction est strictement croissante sur I donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Elle est par ailleurs bornée par 0 et 1 donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.
Pour déterminer sa limite, il suffit de savoir si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît ou décroît... c'est justement ce que nous donne la question 1.a).
En effet, $x_n\in]0,1[$ donc $g(x_n)=\sqrt{x_n}-x_n>0$. Autrement dit :

$$x_{n+1}>x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

On en déduite que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et d'après la question précédente on conclut que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *Questions très diversement traitées. Les meilleurs font une récurrence, utilisent l'étude de g pour l'initialisation, la croissance de la fonction racine pour l'hérédité et citent la continuité de cette même fonction pour conclure sur la valeur de la limite de la suite (x_n). Beaucoup de candidats semblent croire qu'une suite croissante et majorée par 1 converge vers 1.* »

On considère maintenant les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2^n(x_n-1) \text{ et } v_n=2^n\left(1-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{u_n}{x_n}$$

2. $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=2^{n+1}(x_{n+1}-1)-2^n(x_n-1)=2^{n+1}(x_{n+1}-1)-2^n(x_{n+1}^2-1)\\&=2^n\left(-x_{n+1}^2+2x_{n+1}-1\right)=-2^n(x_{n+1}-1)^2\leq 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de candidats étudient le discriminant de l'expression $-x^2+2x-1$ pour déterminer son signe* ».

3. $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=2^{n+1}\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}}-2^n\frac{x_n-1}{x_n}=2^{n+1}\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}}-2^n\frac{x_{n+1}^2-1}{x_{n+1}^2}\\&=\frac{2^n}{x_{n+1}^2}\left(2x_{n+1}(x_{n+1}-1)-(x_{n+1}^2-1)\right)=\frac{2^n}{x_{n+1}^2}(x_{n+1}-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats croient que la suite (u_n) est positive et essaient de conclure en utilisant que x_n est plus grande que 1, ce qui est faux pour $t<1$* ».

4. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n=2^n(x_n-1)-2^n\dfrac{x_n-1}{x_n}=2^n\dfrac{x_n^2-2x_n+1}{x_n}=2^n\dfrac{(x_n-1)^2}{x_n}\geq 0.$

5. *Montrons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes* :
   On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Il suffit donc de montrer qu'elle est minorée.
   Or, d'après 4. on a : $u_n \geq v_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Par ailleurs la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq v_0$.
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par v_0.

   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$. (Théorème de la limite monotone).

   Lu dans le rapport de jury : « *Les résultats précédents ne permettent pas de dire que les suites sont adjacentes. Certains candidats veulent conclure en écrivant « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minore par v_n elle est donc convergente ». L'argument correct est « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par v_0 elle est donc convergente* ».

   De même, en notant que $v_n \leq u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, on montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par u_0.
   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

6. *Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on notera L* :
   Rappelons que l'énoncé nous indique que $v_n = \dfrac{u_n}{x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Or, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ d'après la question 1. et ce pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

   Donc si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

   Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ont même limite notée } L}$.

   Lu dans le rapport de jury : « *On voit parfois que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2^n ou plus souvent 0 car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1* ».

7. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et toutes deux ont pour limite L.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n \leq L \leq u_n}$.

   En particulier, pour $n = 0$, on a : $v_0 \leq L \leq u_0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x_0} \leq L \leq x_0 - 1$, avec $x_0 = t$.

   Conclusion : $\boxed{1 - \dfrac{1}{t} \leq L \leq t - 1}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Question souvent bien traitée* ».

   L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t. Nous considérons donc désormais la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

8. *Écrivons une fonction Python* **`estimef(t)`** *qui retourne une valeur approchée à 10^{-3} près de L pour tout valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$:*

   Nous avons besoin, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$, de déterminer à 10^{-3} près $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Pour chaque valeur de t, nous allons donc construire par récurrence une valeur approchée de L en utilisant les définitions des suites (x_n), (u_n) et (v_n).

Nous commençons par initialiser x_0 à t, u_0 à $2^0(x_0-1)=t-1$ et v_0 à $u_0/x_0=u_0/t$.
Le nombre de répétition n'étant pas connu, nous répéterons le calcul de chacun de ces termes tant que $u_n - v_n > 1e-3$.
Dès que $u_n - v_n \leq 1e-3$ nous retournerons $(u_n+v_n)/2$ comme valeur approchée de L.

Une écriture possible de la fonction demandée est donc :

```
from math import *

def estimf(t):
   n = 0
   x = t
   u,v = t-1,u/t
   while u-v > 1e-3: # on rappelle que :v_n < u_n, ∀n ∈ ℕ
      n += 1
      x = sqrt(x)
      u = 2**n*(x-1)
      v = u/x
   return (u+v)/2
```

Pour donner une représentation graphique de f, on importera la bibliothèque `matplotlib.pyplot` ainsi que la bibliothèque `numpy` et on écrira :

```
T = np.linspace(0.5,5,100)
Y = [estimef(t) for t in T] # liste avec les valeurs de f(t)
plt.plot(T,Y,'r-')
```

Pour tout $t>0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.

9. Il suffit de considérer l'inégalité obtenue en 7 en prenant $t=1$. Alors $\boxed{f(1)=0}$.

   Lu dans le rapport de jury : « *Question souvent bien traitée* ».

10. L'encadrement obtenu en 7. s'écrit désormais $1-\dfrac{1}{t} \leq f(t) \leq t-1$ ou encore $\dfrac{t-1}{t} \leq f(t) \leq t-1$.

    Pour obtenir un encadrement de $\dfrac{f(t)}{t-1}$, il reste à diviser par $t-1 \neq 0$:

    – Si $t-1>0 \Leftrightarrow t>1$ alors : $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{f(t)}{t-1} \leq 1$

    – Si $t-1<0 \Leftrightarrow t<1$, alors $1 \leq \dfrac{f(t)}{t-1} \leq \dfrac{1}{t}$

    Par théorème d'encadrement des limites, on obtient : $\underset{t\to 1}{lim}\dfrac{f(t)}{t-1} = 1$

    On rappelant que $f(1)=0$ d'après 8., cette limite s'écrit : $\underset{t\to 1}{lim}\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1} = 1$

    Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } f'(1)=1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *L'immense majorité des candidats pense à utiliser le théorème d'encadrement des limites mais oublie de séparer les cas $t > 1$ et $t < 1$* ».

11. a) On suppose $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_2 \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrons par récurrence que $\mathcal{R}_n : x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$:
   i. *Initialisation* : $\mathcal{R}_0$ est vraie car, par hypothèse, $x_0(t_1 \cdot t_2) = t_1 \cdot t_2$ et $x_0(t_1) \cdot x_0(t_2) = t_1 \cdot t_2$
   ii. *Hypothèse* : supposons $\mathcal{R}_n$ vraie pour n fixé.
   iii. *Hérédité* : $x_{n+1}(t_1 \cdot t_2) = \sqrt{x_n(t_1 \cdot t_2)}$
   et $x_{n+1}(t_1) \cdot x_{n+1}(t_2) = \sqrt{x_n(t_1)} \cdot \sqrt{x_n(t_2)} = \sqrt{x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)}$
   Donc, par hypothèse de récurrence, $x_{n+1}(t_1 \cdot t_2) = x_{n+1}(t_1) \cdot x_{n+1}(t_2)$
   iv. ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats ne voient pas qu'il faut faire une récurrence.* »

b) On revient à la définition de $u_n(t)$:

$$\begin{aligned}
u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2) &= 2^n\left(x_n(t_1 \cdot t_2) - 1\right) - 2^n\left(x_n(t_1) - 1\right) - 2^n\left(x_n(t_2) - 1\right)\\
&= 2^n\left(x_n(t_1 \cdot t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1\right)\\
&= 2^n\left(x_n(t_1) \cdot x_n(t_2) - x_n(t_1) - x_n(t_2) + 1\right)\\
&= 2^n\left(x_n(t_1) - 1\right) \cdot \left(x_n(t_2) - 1\right)\\
&= 2^n \frac{u_n(t_1)}{2^n} \cdot \frac{u_n(t_2)}{2^n} = \frac{u_n(t_1) \cdot u_n(t_2)}{2^n}
\end{aligned}$$

Or on a vu en 5. que les suites $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent pour toutes valeurs de t dans $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)\right) = 0}$

Lu dans le rapport de jury : « *Rarement bien traitée, principalement parce que la forme indéterminée $2^n x_n$ n'est pas vue.* »

c) Par définition de f : $\lim_{n\to\infty} u_n(t_1 \cdot t_2) = f(t_1 \cdot t_2)$, $\lim_{n\to\infty} u_n(t_1) = f(t_1)$ et $\lim_{n\to\infty} u_n(t_2) = f(t_2)$.

Conclusion : $\boxed{f(t_1 \cdot t_2) = f(t_1) + f(t_2)}$.

12. a) Utilisons l'égalité qui précède en notant que si $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+$, alors $1 + \dfrac{h}{t} \in \mathbb{R}_+$ et :

$$f(t) + f\left(1 + \frac{h}{t}\right) = f\left(t \cdot \left(1 + \frac{h}{t}\right)\right) = f(t+h)$$

Conclusion : $\boxed{f(t+h) - f(t) = f\left(1 + \frac{h}{t}\right)}$

Lu dans le rapport de jury : « *Assez peu traitée* ».

b) Nous savons que $f(1) = 0$ d'après 8. et $f'(1) = 1$ d'après 9. f est dérivable en 1 et à ce titre elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 qui vaut :

$$f(x) \underset{1}{=} f(1) + (x-1)f'(1) + o(x-1) \underset{1}{=} x - 1 + o(x-1)$$

En posant $x = 1 + \frac{h}{t}$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et h au voisinage de 0, on a $1 + \frac{h}{t}$ au voisinage de 0 et :

$$f\left(1 + \frac{h}{t}\right) \underset{0}{=} \frac{h}{t} + o(h)$$

En utilisant la relation obtenue en 12.a) on en déduit :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \underset{0}{=} \frac{1}{t} + o(1)$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable en tout } t \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } f'(t) = \frac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*}$

c) D'après ce qui précède, on en déduit que f est une primitive de $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $\exists c \in \mathbb{R} / f(t) = lnt + c, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$.
Or on rappelle que $f(1) = 0$ (question 8.) donc $c = 0$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est la fonction } ln}$

13. On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ avec $x_0 = t$.
On a : $x_1 = \sqrt{t} = t^{1/2}$, $x_2 = \sqrt{x_1} = t^{1/4}$.
Par récurrence, on montre facilement que $x_n(t) = t^{\frac{1}{2^n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc $u_n(t) = 2^n\left(t^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) = 2^n\left(e^{\frac{lnt}{2^n}} - 1\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Or $\underset{n\to\infty}{lim} \frac{lnt}{2^n} = 0$ donc, par utilisation des équivalents : $u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \frac{lnt}{2^n} = lnt$
Conclusion : $\boxed{f(t) = lnt, \forall t \in \mathbb{R}_+^*}$

Lu dans le rapport de jury : « *Seuls les meilleurs candidats ont traité cette question* ».