Devoir maison 1 : Suites numériques

Problème : Approximation de $\sqrt{2}$ par l'algorithme de Babylone

Cette méthode a été proposée, sur la base d'une figure géométrique, par Héron d'Alexandrie, au premier siècle de notre ère.
Supposons un rectangle R_0 de longueur a_0 et de largeur b_0 de surface égale à 2 (on pourra prendre $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$).
Calculer $\sqrt{2}$ revient à chercher la solution positive de l'équation $x^2 = 2$ et donc à déterminer la longueur du côté d'un carré de surface égale à 2...
L'idée élaborée par Héron d'Alexandrie consiste à passer pas à pas du rectangle de départ au carré cherché en construisant des rectangles intermédiaires R_n de longueur a_n et largeur b_n tels que :

- Pour tout entier $n \geq 0$, $a_n \cdot b_n = 2$
- Pour tout entier $n \geq 0$, la longueur du rectangle R_{n+1} se déduit du rectangle R_n par la relation

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

① Connaissant le rectangle initial de côtés de longueurs respectives $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$, justifier la construction à la règle et au compas du rectangle de côté a_1 et b_1 vérifiant :

$$a_1 b_1 = a_0 b_0 = 2 \text{ et } a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

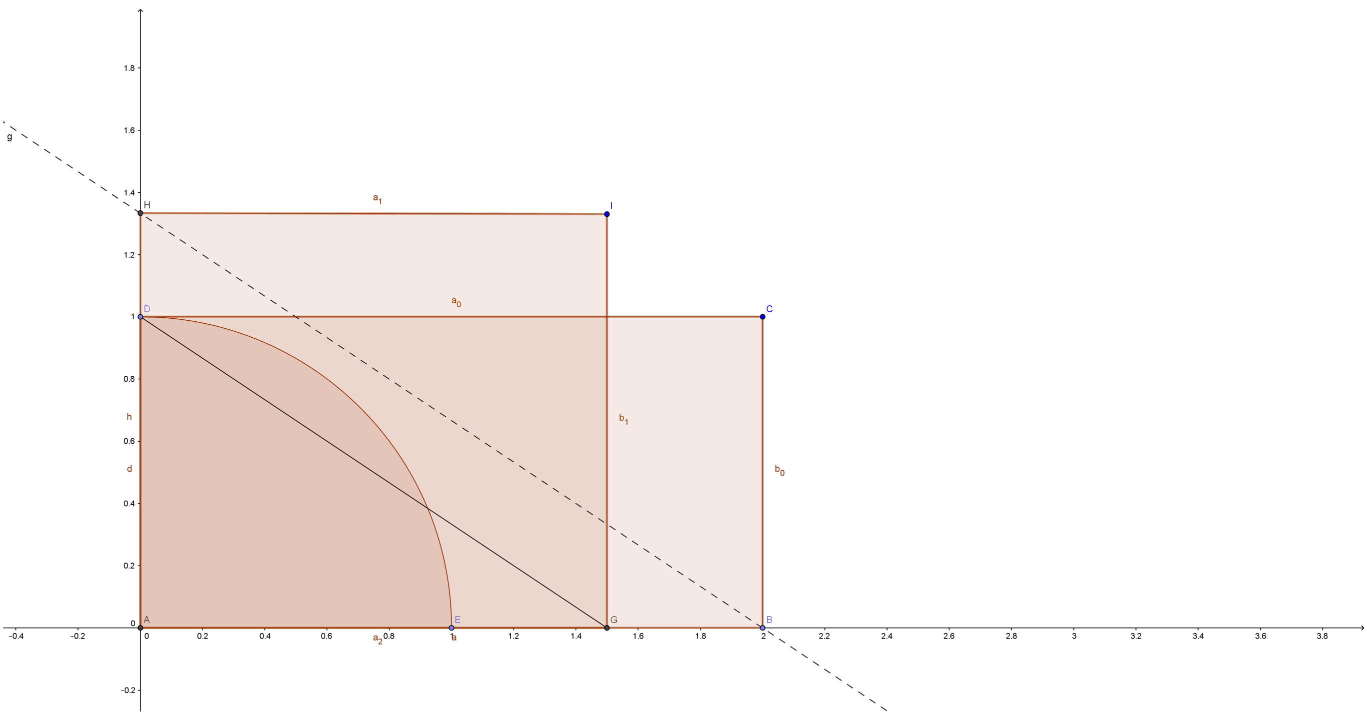

Figure 1 – `Algorithme de Babylone`

② Justification de l'algorithme d'Héron.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n < a_n$.
b) Montrer que (a_n) est une suite monotone, strictement décroissante.
c) Montrer que (b_n) est une suite monotone, strictement croissante.
d) En déduire que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite L qu'on déterminera.

③ Écrire une fonction Python qui retourne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près ainsi que le nombre d'itérations nécessaire pour l'obtenir.

④ On ne considère cette fois que la suite définie par $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$.

a) Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ et donner son allure sur R_+^* en précisant son comportement asymptotique.
b) Déterminer un intervalle stable par f et en déduire la convergence de la suite (a_n) vers $\sqrt{2}$.
c) Montrer en appliquant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel k, $0 \leq k < 1$, tel que

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq k|a_n - \sqrt{2}|,\ \forall n \geq 0$$

Conclure que pour $a_0 = 2$, $|a_n - \sqrt{2}| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n (2 - \sqrt{2})$ $\forall n \geq 0$ et en déduire un rang n_0 à partir duquel a_n fournit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.

d) Valider votre réponse à l'aide d'une fonction Python.