MATHEMATIQUES
Variable aléatoires réelles discrètes et algèbre linéaire

Le sujet se compose de deux exercices et un problème qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'**est pas** autorisé au cours de l'épreuve.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geq 2$, on définit la variable aléatoire X_n égale au gain total à l'issue des n premiers lancers.

① Montrer que X_2 suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre. Que vaut son espérance ?

② Déterminer la loi de X_3 puis calculer son espérance.

③ Soit $n \geq 2$. Justifier que X_n prends ses valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$

④ Écrire une fonction Python `simulX(n)` qui modélise l'expérience aléatoire ci-dessus et retourne le gain total à l'issue des n premiers lancers.
Donner le moyen d'estimer $\mathbb{E}(X_n)$ grâce à cette fonction.

⑤ Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k-1)$$

⑥ On souhaite maintenant déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ sans avoir à expliciter la loi de X_n...
On note, pour tout $n \geq 2$, Q_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k)s^k$$

a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = \mathbb{E}(X_n)$. Exprimer $\mathbb{V}(X_n)$ à l'aide de Q_n.

b) Montrer, pour tout $n \geq 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$: $Q_{n+1}(s) = \dfrac{1+s}{2} Q_n(s)$

c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s

d) Conclure sur l'espérance et la variance de X_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 2 :

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E. Considérons l'endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ avec

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } A - \lambda I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-2\lambda & -1 \\ 4 & -4 & -2-2\lambda \end{pmatrix} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. **Diagonalisation de u**

   a) Montrer qu'il existe deux valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A - \lambda I$ est non inversible (on notera $\lambda_1 < \lambda_2$).

b) Pour chacunes de ces valeurs de λ, résoudre le système $(S_\lambda) : (A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et en déduire une base de $E_\lambda = \ker(u - \lambda id)$ de telle façon que les coordonnées des vecteurs de bases soient dans $\{-4; -1; 0; 1\}$. Que peut-on dire de l'image par u de ces vecteurs de base ?

c) En déduire une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ de E telle que la matrice de u dans cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ soit

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Recherche des « racines carrées » de u**

a) On suppose qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = u$.

i. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$.

ii. Démontrer que $u\big(v(\overrightarrow{e_1}')\big) = -2v(\overrightarrow{e_1}')$. En déduire que $v(\overrightarrow{e_1}') \in E_{\lambda_1}$ et donc que $v(\overrightarrow{e_1}')$ et $\overrightarrow{e_1}'$ sont colinéaires.

iii. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur quelconque de E_{λ_2}. Démontrer que $u\big(v(\overrightarrow{x})\big) = v(\overrightarrow{x})$ et en déduire que $v(\overrightarrow{x})$ appartient à $\text{Vect}(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$.

iv. En déduire qu'il existe des nombres réels a, x, y, z, t tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.$$

v. Démontrer que $\big(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)\big)^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et en déduire que $a^2 = -2$.

b) Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $v \circ v = u$? *Votre réponse sera justifiée.*

Problème :

On se propose d'étudier le modèle d'Ehrenfest.
On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules (avec $N \in \mathbb{N}^*$).
A chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N et on notera D_n la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Si ce nombre est inférieur ou égale au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 (on dira que l'événement $T_{2,1}$ est réalisé), sinon on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 (et on dira que l'événement $T_{1,2}$ est réalisé).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouels présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange...

Par exemple : Si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$. On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égale à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et on a $X_1 = 2$. On choisit alros de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égale à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et on a $X_2 = 3$. On choisit de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. A l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de 3/5 et $X_3 = 4$ avec une probabilité de 2/5.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!],\ Y_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$$

Préliminaire :

① Écrire une fonction Python `simulX(N,a,n)` de paramètres le nombre `N` total de boules, le nombre `a` de boules initialement présentes dans l'urne U_1 et n le nombre d'étapes réalisées et qui retourne la liste `L=[X_0,X_1,...,X_n]` des valeurs prises par X_i pour $0 \leq i \leq n$.

② Expliquer comment représenter graphiquement l'évolution de la composition de l'urne U_1 grâce à cette fonction.

③ Écrire une fonction `estimeEspX(N,a,n,m)` où m est supposé suffisamment grand et qui retourne une estimation de $\mathbb{E}(X_n)$.

I. Matrice de transition

① On suppose que $N = 2$.

a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Y_{n+1} = A_2 Y_n$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
Une récurrence n'est pas nécessaire.
b) Montrer qu'il existe trois valeurs réelles de λ pour lesquelles la matrice $A_2 - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
c) Soit l'espace vectoriel $E_\lambda = \ker(A_2 - \lambda I_2)$. Déterminer E_λ pour chacune des valeurs de λ obtenues précédemment et montrer qu'en juxtaposant une base de chacun de ces espaces vectoriels, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$.
d) En déduire que A_2 est semblable à une matrice diagonale qu'on explicitera.
e) Si on suppose qu'il y a initialement 1 boule dans l'urne U_1, utiliser ce qui précède pour déterminer Y_n en fonction de n.
f) En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ et déterminer sa limite en l'infini.

② Dans toute la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
On considère la matrice A de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & (N-1)/N & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & (N-1)/N & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & 1/N & 0 \end{pmatrix}$$

Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = AY_n$ (*une récurrence n'est pas nécessaire*).

③ On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
Déterminer, lorsque $N = 2$ et $N = 3$ le noyau de ${}^tA - I_{N+1}$ noté : $E_1 = \ker({}^tA - I_{N+1})$.
Pourquoi parle-t-on pour E_1 de l'espace vectoriel des invariants par ${}^tA$?

④ Prouver que, dans le cas général, la matrice ${}^tA$ possède au moins un vecteur invariant non nul.

⑤ En déduire que la matrice ${}^t(A - I_{N+1})$ est non inversible puis que la matrice A possède également au moins un vecteur invariant non nul.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

① Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?

② En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$.
✐*Remarque : on pourra utiliser le système complet d'événements* $\{(X_n = k), 0 \leq k \leq N\}$.

③ En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et de $\mathbb{E}(X_0)$.

④ On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

III. Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace vectoriel $E_1 = \ker(A - I_{N+1})$ dont on a montré dans la partie I. qu'il était non réduit au vecteur nul.

① Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Prouver que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \binom{N}{k} x_0$.

② En déduire la dimension de E_1.

③ Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.

④ Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.

On donnera son expression.

⑤ On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, N]\!], \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k$$

Quelle est la loi suivie par X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.

⑥ On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞.
Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.