Devoir : Variables à densités et algèbre

Au choix : Exercice 12-TD13 ou bien Exercice 1 ci-dessous :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{u\}$
   b) La matrice A est-elle inversible ?

2. a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et tel que $f(v) = u$
   b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$
   c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.

3. a) Écrire, sans utiliser de formule de changement de bases, la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   b) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Écrire P et justifier son inversibilité.
   c) Donner une relation liant les matrices A, N, P et P^{-1} puis en déduire que pour tout entier $k \geq 3$, on a : $A^k = 0$.

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).
   a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \mathrm{Vect}\{I, N, N^2\}$. On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Établir que $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$. En déduire que $C_A = \mathrm{Vect}\{I, A, A^2\}$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 2 :

Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, nous lui associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad P^*(0) = P(0).$$

   Démontrer que P^* est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Nous définissons alors une application φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui même en posant :

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P^* \end{array} \right.$$

2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Montrer que la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est une matrice diagonale qu'on nommera D.

4. Notons $f_0 : x \longmapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \longmapsto (x-1)(x+1)$ et $f_2 : x \longmapsto (x+1)^2$.

   Montrer que $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. En notant (c_0, c_1, c_2) ses composantes dans la base $\mathcal{F}$, exprimer c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(1)$, dérivée de P en 1.

5. Calculer $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ et donner l'expression de ces fonctions polynômes dans la base $\mathcal{B}$. Donner ensuite, grâce à la question 5. l'expression de $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ dans la base $\mathcal{F}$. En déduire que la matrice A ci-dessous est la matrice de φ dans la base $\mathcal{F}$:
$$A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Exprimer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{F}$ et établir une relation entre A et D.

7. En déduire le moyen de déterminer A^n pour tout n entier naturel (l'expression de A^n n'est pas demandée).

Exercice 3 : On suppose que $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Rappel 1 : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et de densités de probabilité respectives f et g définies sur $\mathbb{R}$, alors $X+Y$ admet pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h : t \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Rappel 2 : On définie la fonction Γ par : $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-t}dt$ vérifiant $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle (cf D.S. n° 4 - Problème 1) que X suit une loi **Gamma** de paramètres (b, ν), $b > 0$, $\nu > 0$ et on notera $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$ si X admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{b^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-bx} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

① On suppose que X_1 et X_2 suivent une loi exponentielle de paramètre λ et sont indépendantes.

   a) Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.

   b) On pose $U = X_1 - X_2$, $V = inf(X_1, X_2)$ et $W = |U|$. Déterminer les lois de U, V et W et examiner l'indépendance de U et V.

   c) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X_1. Déterminer la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$

② Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(b, \nu_1)$ et $\Gamma(b, \nu_2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$ (*on pourra pour ça faire le changement de variable $u = x/t$*) ainsi que la formule d'intégration : $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}$.

Problème : Étude d'une loi de probabilité et application.

Dans ce problème, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers naturels non nuls, des nombres réels et des nombres réels strictement positifs.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction $\ell_{\alpha,r}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\ell_{\alpha,r}(t) = \begin{cases} \alpha \dfrac{t^{\alpha-1}}{r^\alpha} & \text{si } t \in]0,r[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① Montrer que $\ell_{\alpha,r}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.

✐*Remarque : Dans toute la suite de ce problème, on supposera cette condition réalisée.*

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi $\mathcal{L}$ de paramètres α et r si X admet $\ell_{\alpha,r}$ pour densité. On notera :

$$X \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, r)$$

✐ *Dans toute la suite de ce problème, on note X une variable aléatoire de loi $\mathcal{L}(\alpha, r)$.*

② On s'intéresse tout d'abord aux propriétés élémentaires de cette loi.

a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
b) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq 0)$?
c) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $W = -\ln\left(\dfrac{X}{r}\right)$. Préciser son espérance et sa variance.

③ Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètre λ et μ respectivement.

a) Donner une densité de $Y = -U_2$.
b) On rappelle que si V_1 et V_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives v_1 et v_2, alors $Z = V_1 + V_2$ est encore une variable aléatoire réelle à densité, dont une densité est données par $z \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} v_1(u)v_2(t-u)du$.
Montrer qu'une densité de $U_1 - U_2$ est donnée par :

$$g_{\lambda,\mu} : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\alpha\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

c) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, respectivement de lois $\mathcal{L}(\alpha, r)$ et $\mathcal{L}(\beta, s)$ avec $(\alpha, \beta, r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$. A l'aide de la question qui précède et de la question 2.c), donner la loi de $Z = -\ln\left(\dfrac{sX}{rY}\right)$ et en déduire que :

$$\mathbb{P}(X < Y) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{s}{r}\right)^\alpha & \text{si } s < r \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{r}{s}\right)^\beta & \text{si } r \leq s \end{cases}$$

④ On applique maintenant le résultat de la question précédente à un modèle de test de dépistage d'une maladie canine H au sein d'une population $\mathcal{P}$. La présence de cette maladie chez un individu de $\mathcal{P}$ se note par la modification de la loi de concentration de deux bactéries A et B présentes dans l'estomac. Plus précisément, ces concentrations respectives X et Y, en UFCml^{-1} (Unité Formant Colonie par millilitre), sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\mathcal{L}(\lambda, r)$ et $\mathcal{L}(\beta, s)$, avec $(\alpha, \beta, r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$.

On a statistiquement les valeurs suivantes :

– Pour les sujets *non atteints* de la maladie H :

$$\alpha = 2\,;\ \beta = 3\,;\ r = 100 \text{ UFC } ml^{-1}\,;\ s = 50 \text{ UFC } ml^{-1}$$

– Pour les sujets *atteints* de la maladie H :

$$\alpha = 4\,;\ \beta = 2\,;\ r = 400 \text{ UFC } ml^{-1}\,;\ s = 800 \text{ UFC } ml^{-1}$$

Le test T consiste à effectuer un prélèvement sanguin d'un individu $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$. Une fois ce prélèvement mis en culture dans des conditions adéquates, les deux bactéries A et B entrent en concurrence. Au bout de quelques heures, seule celle dont la concentration était la plus forte subsiste, l'autre ayant totalement disparu. Cette procédure permet donc de savoir lequel des événements $(X < Y)$ ou $(X > Y)$ est réalisé pour $\mathcal{C}$.
On note $R = (X < Y)$. Le test est positif si R est réalisé, négatif sinon.
On note M l'événement « le sujet $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$ est atteint de la maladie H ». L'événement contraire d'un événement E sera systématiquement noté $\overline{E}$ dans la suite.

a) Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(R|M) = \mathbb{P}_M(R)$ et $\mathbb{P}(R|\overline{M}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(R)$.

b) Un sondage a permis d'estimer $\mathbb{P}(M) = \dfrac{1}{40}$. Donner la probabilité qu'un sujet testé soit atteint de la maladie H sachant que son test T est positif. Qu'en pensez-vous ?