- Programme de colle semaines 13 et 14 -

✐ On posera un exercice permettant de vérifier la maîtrise des outils d'« intégration » au programme de **première année** (rappelé ci-dessous) ainsi qu'un exercice portant sur le chapitre « Intégrales généralisées » On choisira une **question de cours** parmi les huit questions ci-dessous (chapitres 4 « Intégrales généralisées » et 5 « variables aléatoires à densité ») :

- **Q1 :** Nature et valeur éventuelle de $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$, $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ et $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.
- **Q2 :** $\forall b > 0$, nature et valeur éventuelle de $\displaystyle\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
- **Q3 :** Énoncé du théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives.
- **Q4 :** Énoncé du théorème de changement de variable et application à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}dt$
- **Q5 :** Si f est une fonction paire, continue sur $]-a,a[$ telle que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$ et si f est impaire, continue sur $]-a,a[$ telle que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$
- **Q6 :** Soit X v.a.r. de densité f. Déterminer une densité de $Y = aX + b$ en fonction de celle de X.
- **Q7 :** Soit X v.a.r. de densité f. Déterminer une densité de $Y = X^2$ en fonction de celle de X.
- **Q8 :** Loi du minimum ou du maximum de deux ou n variables aléatoires indépendantes. Application à l'exemple 1.5 (loi du minimum de deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ) ou à l'exemple 1.6 (loi du minimum ou du maximum de n variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,a]$).

Rappel du programme d'intégration de BCPST1 :

- Intégrale d'une fonction continue f sur un segment (l'existence de primitives pour une fonction continue sur un segment est admise). Lien avec la notion d'aire pour une fonction continue positive.
- Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.
- Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
- *Compléments :* Sommes de Riemann sur $[0,1]$: $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.
- Intégrations par parties. Changements de variables (✐ « **Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'un intégration par parties ou d'un changement de variable sera indiquée** »).

✐ Au cours d'un exercice d'intégration, il sera possible de demander d'écrire une fonction Python donnant l'approximation numérique d'une intégrale à l'aide de la méthode « des rectangles ».

Bonnes colles !

A suivre : Variables aléatoires à densité.