MATHEMATIQUES
Variable aléatoires réelles à densité

Le sujet se compose de deux problèmes qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer. Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'**est pas** autorisé au cours de l'épreuve.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1 :

Dans tout le problème n désigne un entier naturel **non nul** et a et λ sont des réels **strictement positifs** ;

Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale

Soit Γ la fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

① a) Calculer $\underset{t\to+\infty}{lim}\ e^{-t}t^{x+1}$ pour tout x réel et en déduire qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t \geq T \Rightarrow e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}$$

b) Pour quelles valeurs de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est-elle convergente ?

② a) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$ et donner dans ce cas la valeur de cette intégrale.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge si $x > 0$.

③ Déduire des questions précédentes que pour tout x réel strictement positif, $\Gamma(x)$ converge.

Partie B : Quelques propriétés de cette fonction

① a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) > 0$.

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) Calculer $\Gamma(1)$ puis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

② a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

b) A l'aide d'un changement de variable qu'on justifiera avec soin, démontrer que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ à l'aide de factorielles.

Partie C : Une densité de probabilité

Soit X, variable aléatoire définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit une loi **Gamma** de paramètres (b, ν), $b > 0$, $\nu > 0$ si X admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{b^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-bt} t^{\nu-1} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$$

① a) Si $\nu = 1$, quelle est la loi suivie par X ? Montrer l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ qu'on calculera.

b) Montrer dans le cas général que f est une densité de probabilités (✐ On prendra soin, dans l'étude de la continuité, à distinguer plusieurs cas)

c) Étudier et tracer le graphe de f en distinguant les cas $0 < \nu < 1$, $\nu = 1$ et $\nu > 1$

② Si $b = 1$, on dit que X suit la loi gamma standard de paramètre ν et notée $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.

a) Montrer que : $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu) \Leftrightarrow bX \hookrightarrow \gamma(\nu)$

b) Montrer que si $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n(X)$ existe et vaut : $\dfrac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} = \displaystyle\prod_{m=0}^{n-1} (\nu + m)$

En déduire que $E(X) = \nu$ et $V(X) = \nu$

c) Montrer que si $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$ alors $E(X) = \dfrac{\nu}{b}$ et $V(X) = \dfrac{\nu}{b^2}$

Problème 2 :

Introduction :

Le phénomène appelé mouvement brownien a été observé pour la première fois en 1828 par le botaniste écossais Robert Brown au cours d'une étude portant sur le processus de fertilisation d'une nouvelle espèce de fleur. Brown observa au microscope que les grains de pollen de cette fleur, en suspension dans l'eau au repos, étaient animés d'un mouvement désordonné rapide (qui fut appelé mouvement brownien, ou diffusion). Brown attribua ce mouvement aux chocs de la particule de pollen avec les molécules de l'eau au niveau microscopique. En effet, bien que l'eau soit au repos, les molécules d'eau sont agitées de façon très désordonnées à leur échelle. Ses observations suggéraient plusieurs propriétés de ce mouvement :
– (H_1) : Il est incessant et très irrégulier.
– (H_2) : Le mouvement passé d'une particule n'a aucune influence sur le mouvement présent et futur.

Modélisation :

Notation : Un vecteur aléatoire Z de $\mathbb{R}^2$ est un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires réelles.

On se propose de modéliser la trajectoire M du mouvement brownien de la façon suivante. On suppose qu'à l'instant initial, la particule de pollen est à la position M_0 dans le plan muni de son repère $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. Elle subit un choc par une molécule d'eau à chaque temps entier $n \in \mathbb{N}$ (dans une échelle de temps très petite), de sorte que la position M_{n+1} de la particule de pollen au temps $n+1$ est donnée par :

$$M_{n+1} = M_n + Z_n, \, \forall n \geq 0$$

où $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ indépendants et identiquement distribués. Entre les instants n et $n+1$, la particule se déplace de M_n à M_{n+1} en ligne droite. Nous regardons la trajectoire globale de la particule de pollen jusqu'à un temps 10000.

① En quoi le modèle est-il fidèle aux observations de Brown ? On justifiera sa réponse au regard des propriétés (H_1) et (H_2). Quelles sont pour vous les limites du modèle ?

Tirage de variables aléatoires :

Convention : On note brièvement $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ pour indiquer que la variable aléatoire U suit une loi uniforme sur $]0,1[$.
Notons Z un vecteur aléatoire qui a la même loi que chacun des vecteurs Z_n. L'objectif est de simuler à l'aide d'un outil informatique des trajectoires M pour plusieurs lois pour cette variable. On observera comment le comportement qualitatif global de M dépend du choix de la loi de Z.
On supposera que le **seul** aléa que notre logiciel nous permet de générer consiste en des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.

Exemple 1.

② a) Donner une densité et la fonction de répartition de la variable aléatoire $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. Déterminer son espérance et sa variance.

b) On considère un vecteur aléatoire $A \in \mathbb{R}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(A = (0,1)) = \mathbb{P}(A = (0,-1)) = \mathbb{P}(A = (1,0)) = \mathbb{P}(A = (-1,0)) = \frac{1}{4}$$

On souhaite réaliser un algorithme permettant de simuler le vecteur aléatoire A. A cet effet, on propose ci-dessous une ébauche de fonction écrite en langage Python, où la fonction `random()` réalise (ou simule) une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}_{]0,1[}$. On considère que des appels successifs de `random()` engendrent des réalisations indépendantes. La fonction `flipFlop()`, telle quelle, ne répond pas au but fixé ; La modifier pour qu'elle donne le résultat attendu.

```
def flipFlop():
    U=random()
    if U<0.5
        return [-1,0]
    else
        return [1,0]
```

c) Dessiner les différents cas possibles pour le premier et le second pas de la trajectoire de la particule de pollen lorsque les vecteurs Z_n ont même loi que A. Les points atteints sont-ils équiprobables ?

Exemple 2.

③ a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. Quelle est la loi suivie par $S = 2U - 1$? Préciser son espérance et sa variance.

✐ *Remarque :* Pour modéliser cette variable aléatoire, il suffira d'exécuter :

```
def hasardS():
    return 2*random()-1
```

b) On considère un vecteur $B \in \mathbb{R}^2$ donné à l'issu de la fonction Python suivante :

```
def vecteurB():
    if random()<0.5:
        return [hasardS(),0]
    else:
        return [0,hasardS()]
```

Décrire en termes simples l'évolution de la trajectoire de la particule de pollen lorsque les vecteurs aléatoires Z_n ont tous la même loi que A (premier exemple) ou tous la même loi que B (second exemple). Expliquer notamment ce qui distingue ces deux simulations.

Exemple 3.

On souhaite construire un vecteur aléatoire C comme dans l'exemple 2 à la différence que la distance parcourue à chaque pas de temps n'est plus uniforme mais simulée par une variable aléatoire R. On suppose ici que R admet pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{a(1+x^2)}, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ où } a \text{ est une constante réelle.}$$

④ a) Quelle est la valeur de la constante a qui définit f ?

b) Soit $V \hookrightarrow \mathcal{U}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$. Donner une densité de V puis démontrer que la variable $R = \tan V$ possède f comme densité.

c) Décrire une méthode pour construire le vecteur aléatoire C à partir de deux variables indépendantes $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. On ne demande pas l'écriture du programme.

Modèles isotropes :

On souhaite maintenant générer des vecteurs aléatoires Z construits de la façon suivante. On va d'abord choisir un vecteur de $\mathbb{R}^2$ qui donnera la direction et le sens du mouvement de la particule de pollen à l'issue du choc, puis on va choisir la longueur parcourue dans cette direction avant le prochain choc.

On écrira donc $Z = (R\cos V, R\sin V)$ et on supposera que :

– (P_1) R est une variable aléatoire positive
– (P_2) V suit une loi uniforme sur $]0, 2\pi[$
– (P_3) Les variables R et V sont indépendantes.

⑤ Quel sens donnez-vous aux propriétés (P_2) et (P_3) dans ce modèle ?

Exemple 4.

On souhaite générer une variable aléatoire R ayant pour densité la fonction f_R définie par :

$$f_R(\rho) = \begin{cases} \rho\exp(-\frac{\rho^2}{2}), \text{ pour tout } \rho \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

⑥ a) Vérifier que f_R est bien une densité.

b) Calculer la fonction de répartition F_R de la variable aléatoire R. En déduire la loi de la variable aléatoire R^2.

c) Etant donné $U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$, montrer que la variable aléatoire $E = -2\ln U_2$ possède une densité et déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

d) En déduire une méthode pour construire un vecteur aléatoire $D = (R\cos V, R\sin V)$ à partir de deux variables $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ indépendantes. On ne demande pas l'écriture d'un algorithme.

Exemple 5.

On prend le même modèle que dans l'exemple **4**

$$Z = (R\cos V, R\sin V) \text{ satisfaisant } (P_1), (P_2) \text{ et } (P_3)$$

mais la loi de R est cette fois prise uniforme sur $]0, 1[$. On note E le vecteur aléatoire $(R\cos V, R\sin V)$.

Exemple 6.

On prend toujours le même modèle que dans l'exemple **4**

$$Z = (R\cos V, R\sin V) \text{ satisfaisant } (P_1),\ (P_2) \text{ et } (P_3)$$

et on suppose que R a une loi admettant la densité $g : x \longmapsto \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On note F le vecteur aléatoire $(R\cos V, R\sin V)$.

⑦ Pour chacun des vecteurs aléatoires $Z = (X, Y)$ des **Exemples 1 à 6**, la variable aléatoire $R = \|Z\| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Analyse des trajectoires et conclusion

On a tracé en annexe dans les **Figures 1 à 6** des trajectoires de la particule de pollen jusqu'au temps 10000. Pour chacune de ces figures, on a choisi la loi de Z d'après l'un des exemples 1 à 6 ; les graduations sont indiquées sur le côté.

⑧ a) A l'aide d'un raisonnement méthodique, déterminer la loi qui correspond à chacune de ces figures.

b) Quelles sont les modèles les plus appropriés pour décrire le mouvement de la particule de pollen observé par Brown ?