MATHEMATIQUES
Sujet de probabilités et d'algèbre

Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer. Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'**est pas** autorisé au cours de l'épreuve.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice :

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $A = \dfrac{1}{4} \cdot (M - I_3)$ puis A^2.
   b) Montrer qu'il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels telle que $M^n = I + u_n A$. Déterminer u_n puis M^n.

2. Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 puis J^n et montrer que J n'est pas inversible.

3. On note $E = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, B = aI + bJ\}$.
   a) Montrer que E est stable par la multiplication matricielle.
   b) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En donner une base.
   c) Quels sont les éléments inversibles de E ?
   d) Résoudre dans E l'équation d'inconnue X : $X^2 = I_3$.
   e) Montrer que $M \in E$ et que $M^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n)\, J$

Problème 1 :

Une urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.
Soit c un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche...) ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

1. On suppose que $c = 0$.
   a) Déterminer $X(\Omega)$ et montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = n)$ et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

c) On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire discrète X existe si la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et que, si c'est le cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$.
Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et donner sa valeur.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ en fonction de c quelconque.

3. a) Que retournent respectivement `rdm.randint(a,b)` et `rdm.random()` en langage Python ?
   b) Écrire une fonction `simulExp()` qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s. Cette fonction doit simuler l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égale à s. Elle doit renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon. ✐ On prendra soin de justifier chacun des choix qu'on a été amené à faire.

   c) Écrire une fonction `estimEsp(c,s,m)` qui utilise `simulExp()` et qui permette, sans avoir à utiliser la bibliothèque `numpy`, d'estimer l'espérance de X en simulant un grand nombre m de fois l'expérience.

   A titre d'exemple, on obtient :
   `estimEsp(0,10,1000) = 1.956` ; `estimEsp(0,50,1000) = 2.019` ;
   `estimEsp(0,100,1000) = 2.011`

   `estimEsp(1,10,1000) = 2.174` ; `estimEsp(1,50,1000) = 2.575` ;
   `estimEsp(1,100,1000) = 2.880` ; `estimEsp(1,200,10000) = 3.0843`

   `estimEsp(2,10,1000) = 2.09` ; `estimEsp(2,50,1000) = 3.533` ;
   `estimEsp(2,100,1000) = 4.209` ; `estimEsp(2,500,10000) = 5.4888`

   Commentez ces résultats. Sont-ils conforment à votre réponse à la question 1. ? Quelle hypothèse pouvez-vous faire sur $\mathbb{E}(X)$ pour $c = 1$ et $c = 2$?

   d) Montrer comment il est possible d'utiliser `simulExp()` pour écrire une fonction `estimProbZero(c,s,m)` simulant un grand nombre m de fois l'expérience et retournant une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$.

   Voici quelques exemples d'exécution de cette fonction : `estimProbZero(1,100,1000) = 0.001` ; `estimProbZero(2,100,1000) = 0.011` ; `estimProbZero(5,100,1000) = 0.073`
   Commentez ces résultats.

4. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2 + kc}{4 + kc}$.

5. On suppose dans cette question que $c = 1$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul.
   b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(E_n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
   c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
   d) On souhaite montrer l'existence et calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

i. On rappelle au préalable le théorème « de transfert » qui assure que, si X est une variable aléatoire discrète infinie et $Y = g(X)$ est une variable aléatoire discrète fonction de X, alors $\mathbb{E}(Y)$ existe si la série $\sum g(n)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}(X = n)$.
Utiliser ce théorème pour montrer que $\mathbb{E}(X + 3)$ existe et calculer sa valeur.
ii. En déduire $\mathbb{E}(X)$ que vous confronterez au résultat de l'estimation obtenue en 3.c).

6. On suppose dans cette question que $c = 2$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
   b) Donner la loi de X (à savoir $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in X(\Omega)$).
   c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Confrontez votre réponse au résultat de l'estimation obtenue en 3.c).
7. On souhaite généraliser à tout c entier naturel non nul, les valeurs de $\mathbb{P}(X = 0)$ obtenues précédemment.
   a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2 + kc}\right)$.
   b) Démontrer le résultat suivant : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.
   c) Déterminer $\underset{n\to\infty}{lim}\, \mathbb{P}(E_n)$ et en déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

Problème 2 :

Dans une population, tous les individus n'ont pas le même potentiel de reproduction, ni la même probabilité de survie d'une année à l'autre. De même, l'âge est un facteur important. Nous choisissons alors une unité de temps $u \in \mathbb{R}_+$ et nous décidons de découper la population en p classes d'âges de même amplitude (à l'exception de la dernière classe), $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Une classe d'âge C_i, $i \in [\![1, p-1]\!]$ est donc caractérisée par la donnée d'un âge minimum $(i-1)u$, et la donnée d'un âge maximum $iu-1$. La classe d'âge C_p est caractérisée par la seule donnée d'un âge minimum $(p-1)u$.

Par exemple, dans le cadre d'une population d'êtres humains, nous choisissons une unité de temps u de quinze années et nous découpons la population en 5 classes d'âge ($p = 5$). La classe C_1 inclus les êtres humains d'âge compris entre 0 et 14 ans, la classe C_2 les êtres humains d'âge compris entre 15 et 29 ans, la classe C_3 les êtres humains d'âge compris entre 30 et 44 ans, la classe C_4 les êtres humains d'âge compris entre 45 et 59 ans, la classe C_5 incluant les êtres humains âgés d'au moins 60 ans.

Pour $s \in \mathbb{N}$, nous décidons de représenter la population après s unités de temps par la matrice $N_s \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$N_s = \begin{pmatrix} n_{s,1} \\ n_{s,2} \\ \vdots \\ n_{s,p} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $n_{s,i}$ désigne l'effectif de la i-ème classe d'âge de la population au début de la s-ième unité de temps.
N_0 représente donc l'état initial de la population, N_1 la population après 1 unité de temps, N_2 la population après 2 unités de temps, etc.

① Pour $s \in \mathbb{N}$, exprimer l'effectif total de la population après s unités de temps.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, F_i désigne le taux de fécondité de la i-ième classe d'âge, à savoir le nombre de naissances par unité de temps pour un individu de la i-ème classe d'âge.
De même, pour tout $i \in [\![1,p-1]\!]$, P_i désigne le taux de survie pour un individu entre la classe d'âge C_i et la classe d'âge C_{i+1}.
On note P_p le taux de survie au sein de la p-ième et dernière classe d'âge. Les survivants restent alors au sein de cette classe d'âge.

② Soit $s \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer $n_{s+1,1}$ en fonction de $n_{s,1}, n_{s,2}, \cdots, n_{s,p}$ et de $F_1, F_2, \cdots, F_p$.
b) Proposez une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $N_{s+1} = M \cdot N_s$.

③ *Étude d'un exemple.*
Nous considérons une population de drosophiles (la durée de vie d'une drosophile est inférieure à 30 jours). L'unité de temps choisie u est de 10 jours et nous découpons la population en 3 classes d'âge. Après étude statistique, nous estimons que :

$$F_1 = 0,\ F_2 = 13,\ F_3 = 12,\ P_1 = \frac{1}{4},\ P_2 = \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel s : $N_{s+1} = AN_s$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel s : $N_s = A^s \cdot N_0$.

c) i. Soit (S_λ) le système homogène $(A - \lambda I_3)X = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Montrer que le système (S_λ) admet au moins une solution non nulle pour trois valeurs distinctes de λ parmi lesquelles on trouve $\lambda = 2$ et $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.
Les trois valeurs de λ seront notées λ_1, λ_2, λ_3 telles que : $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.

ii. Résoudre ce système pour chacune des valeurs de λ et donner dans chaque cas un triplet solution de dernière coordonnée égale à 1. On nommera $v_1 = (a_1, b_1, 1)$, $v_2 = (a_2, b_2, 1)$ et $v_3 = (a_3, b_3, 1)$ les solutions respectives prises dans (S_{λ_1}), (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}).

iii. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Désormais $V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}$ et on écrira que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) Comportement asymptotique de la population.
Notons (c_1, c_2, c_3) les coordonnées de N_0 dans la base $\mathcal{V}$.

i. Montrer que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$: $AV_i = \lambda_i V_i$ et plus généralement que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$.
ii. Montrer que : $\forall s \in \mathbb{N}$, $N_s = (\lambda_1)^s c_1 V_1 + (\lambda_2)^s c_2 V_2 + (\lambda_3)^s V_3$.
iii. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$N_s = (\lambda_1)^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$$

où tous les coefficients de la matrice ε_s ont pour limite 0 lorsque s tend vers $+\infty$.

iv. Montrer que les différents rapports $\dfrac{n_{s,1}}{n_{s,3}}$ et $\dfrac{n_{s,2}}{n_{s,3}}$ ont une limite finie lorsque s tend vers $+\infty$ et la calculer. Interpréter votre réponse.