# CORRECTION
# Sujet de probabilités et d'algèbre

## Exercice :

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. a) *Calculons* $A = \dfrac{1}{4} \cdot (M - I_3)$ *puis* $A^2$ *:*
   On obtient immédiatement :
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et donc } A^2 = -A.$$

   b) *Montrons qu'il existe une et une seule suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombre réels telle que* $M^n = I + u_nA$ *:*
   On raisonne par récurrence.

   ① $M^0 = I_3 + 0A$ et $M = I + 4A$ donc il existe $u_0 = 0$ et $u_1 = 4$ tels que $M^n = I + u_nA$ pour $n = 0$ et $n = 1$.

   ② On suppose qu'il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I + u_nA$ pour $n$ fixé, $n \in \mathbb{N}$.

   ③ Alors
$$M^{n+1} = M^n \cdot M = (I + u_nA) \cdot (I + 4A) = I + 4A + u_nA + 4u_nA^2 = \\ I + (4 + u_nI)A + 4u_n(-A) = I + (4 - 3u_n)A$$
   Donc il existe $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ tel que $M^{n+1} = I + u_{n+1}A$

   ④ Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in \mathbb{R}/M^n = I + u_nA$.

   Il reste à montrer l'unicité de cette suite... :
   Supposons qu'il existe deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $M^n = I + u_nA = I + v_nA$.
   Alors $u_nA = v_nA \Leftrightarrow (u_n - v_n)A = 0$ et donc $u_n = v_n$ puisque $A \neq 0$.

   ***Conclusion*** : $\boxed{\exists!(u_n)_{n\in\mathbb{N}}/M^n + I + u_nA,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

   *Déterminons* $u_n$ *puis* $M^n$ *:* D'après ce qui précède, $u_{n+1} = 4 - 3u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 0$.
   $(u_n)$ est donc une suite arithmético-géométrique et la recherche de sa forme explicite commence par la détermination du point fixe $c$ défini par :
$$c = 4 - 3c \Leftrightarrow c = 1$$
   Soit $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - 1$.
   Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -3(u_n - 1) = -3v_n$. $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = -1$.
   D'où $v_n = (-3)^n(-1)$ et donc $u_n = 1 - (-3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + (1 - (-3)^n)\,A}$.

   ✐ *Remarque :* Une autre méthode pour obtenir ce résultat passe par l'application du binôme de Newton. Elle est possible mais n'est pas demandée par l'énoncé et en conséquence sa rédaction n'apporte aucun point.

2. Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculons $J^2$ puis $J^n$ et montrons que $J$ est inversible :*

   On obtient par un calcul immédiat que $\boxed{J^2 = J}$ et donc, par récurrence $J^n = J$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Par ailleurs $J$ n'est pas inversible (!) puisque, en raisonnant par l'absurde, si $J$ inversible, alors :
   $$J^2 = J \Rightarrow J^{-1}J^2 = I_3 \text{ soit } J = I_3 \text{ - ce qui est absurde...}$$

3. On note $E = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, B = aI + bJ\}$.

   a) *Montrons que $E$ est stable par la multiplication matricielle :*
   Soient $B_1 = a_1 I_3 + b_1 J$ et $B_2 = a_2 I_3 + b_2 J$, deux matrices de $E$.
   Alors $B_1 \cdot B_2 = a_1 a_2 I_3 + (b_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2) J \in E$.

   ***Conclusion*** : $\boxed{E \text{ est stable par la multiplication matricielle}}$.

   b) *Montrons que $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on donnera une base :*
   On raisonne par caractérisation des SEV :
   – $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   – La matrice nulle appartient à $E$ (il suffit de prendre $a = 0 = b$).
   – $\forall B_1, B_2 \in \mathbb{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $B = \lambda B_1 + B_2 \in E$ :
   $B_1 \in E \Leftrightarrow \exists (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2 / B_1 = a_1 I_3 + b_1 J$.
   $B_2 \in E \Leftrightarrow \exists (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2 / B_2 = a_2 I_3 + b_2 J$.
   Dès lors, $\lambda B_1 + B_2 = (\lambda a_1 + a_2) I_3 + (\lambda b_1 + b_2) J$.
   On a donc montré que $\exists a = \lambda a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ et $b = \lambda b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $B = aI_3 + bJ$
   Ce qui prouve que $B = \lambda B_1 + B_2 \in E$
   ***Conclusion*** : $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel comme SEV d'un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.

   *Déterminons une base de $E$ :* Il suffit pour ça de noter que $I$ et $J$ sont **deux matrices de $E$** (prendre respectivement $a = 1, b = 0$ et $a = 0, b = 1$) qui forment **une famille génératrice de $E$**.
   Pour montrer que $(I, J)$ est une base de $E$, il suffit de montrer que **c'est une famille libre** :
   Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \lambda_1 I + \lambda_2 J = 0$ $(*)$.

   $$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & -2\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ -2\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2$$

   ***Conclusion*** : $\boxed{(I, J) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E}$.

   c) *Quels sont les éléments inversibles de $E$ ?* Soit $U = aI_3 + bJ \in E$. On cherche $U' \in E$ tel que $U \cdot U' = I_3$.
   On pose pour ça $U' = a' I_3 + b' J$ et on utilise la question 3.a) :
   $$U \cdot U' = I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} aa' & = 1 \\ ba' + b'(a+b) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   On note que la matrice associée au système est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, à savoir : $a(a+b) \neq 0$.
   Il y a donc trois cas :
   – Si $a = 0$ alors $U = bJ$ et $U$ n'est pas inversible puisque $J$ non inversible.

– Si $a+b=0$, alors $U=a(I_3-J)$ avec $I-J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ non inversible.

– Si $a \neq 0$ et $a+b \neq 0$, alors $U$ inversible avec $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a(a+b)} \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $a' = \dfrac{1}{a}$ et $b' = \dfrac{b}{a(a+b)}$.

***Conclusion*** : $\boxed{U = aI_3 + bJ \text{ inversible si } a(a+b) \neq 0 \text{ et } U^{-1} = \frac{1}{a} I_3 - \frac{b}{a(a+b)} J}$

d) *Résolvons dans E l'équation d'inconnue X : $X^2 = I_3$ :*
On pose $X = xI_3 + yJ$. Alors $X^2 = x^2 I_3 + (2xy+y^2)J$. Comme $(I,J)$ est une base de $E$, on a par unicité de la décomposition dans une base :

$$X^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & = 1 \\ y(2x+y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x & = -1 \\ y = 0 \text{ ou } y & = -2x \end{cases}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\text{Les solutions de } X^2 = I_3 \text{ sont } I,\ -I,\ I_3 - 2J \text{ et } -I_3 + 2J}$

e) *Montrons que $M \in E$ et que $M^n = (-3)^n I_3 + (1-(-3)^n) J$* : Il s'agit cette fois d'exprimer $M^n$ en fonction de $I$ et de $J$.
On utilise $M = I_3 + 4J = -3I_3 + 4J$ puisque $A = J - I$.
On applique alors la formule du binôme de Newton en remarquant que $I_3$ et $J$ commutent.

$$\begin{aligned} M^n = (-3I_3+4J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} 4^k J^k = (-3)^n I_3 + \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} 4^k \right) J \\ &= (-3)^n I_3 + ((4-3)^n - (-3)^n) J = (-3)^n I_3 + (1-(-3)^n) J \end{aligned}$$

***Conclusion*** : $\boxed{M^n = (-3)^n I_3 + (1-(-3)^n) J,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

# Problème 1 :

Une urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.
Soit $c$ un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :
– On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore $c$ boules noires dans l'urne.
– On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche...) ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $E_n$ l'événement : « Les $n$ premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».
Soit $X$ la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

1. On suppose que $c = 0$.

   a) *Déterminons $X(\Omega)$ et montrons que $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :*
   D'après l'énoncé $X$ prend toute valeur entier naturel non nul (rang de la première blanche) mais également 0 dans le cas où on n'obtient jamais de boules blanches. Dès lors, $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$

   Par ailleurs, si on note

– $B_n$ l'événement : « Obtenir une boule blanche au $n$-ième tirage »
– $N_n$ l'événement : « Obtenir une boule noire au $n$-ième tirage »
Alors :

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(B_1)=\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(N_1\cap B_2)=\mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \text{ (formule des prob. conditionnelles)}$$

Plus généralement, $\forall n\geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n)&=\mathbb{P}(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{n-1}\cap B_n)=\mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\cdots\mathbb{P}_{N_1\cap\cdots\cap N_{n-1}}\mathbb{P}(B_n)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \text{ (formule des prob. composées)}\end{aligned}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\forall n\in X(\Omega)=\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{2^n}}$

b) *Justifions la convergence de* $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(X=n)$ *et calculons* $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=n)$ *:*

$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(X=n)$ est de même nature que $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui est une série géométrique convergente donc elle converge. Dès lors,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$$

Nous pouvons en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X=0)$. En effet, puisque $X(\Omega)=\mathbb{N}$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X=0)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X=0)+1=1$$

***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{P}(X=0)=1}$

c) On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire discrète $X$ existe si la série $\sum_{n\geq 0}n\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument et que, si c'est le cas, $\mathbb{E}(X)=\sum_{n\in X(\Omega)}n\mathbb{P}(X=n)$.

$$\sum_{n\geq 0}n|\mathbb{P}(X=n)|=\sum_{n\geq 0}\frac{n}{2^n} \text{ est de même nature que } \sum_{n\geq 1}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée convergente car $q=1/2\in]0,1[$.
Dès lors $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe}}$.

Calculons sa valeur : $\mathbb{E}(X)=\sum_{n=0}^{\infty}n\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2}=2.$

2. *Calculons* $\mathbb{P}(X=3)$ *en fonction de c quelconque*
C'est une application directe de la formule des probabilités composées : Pour tout $c\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(N_1\cap N_2\cap B_3)=\mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\mathbb{P}_{N_1\cap N_2}(B_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+c}{4+c}\cdot\frac{2}{4+2c}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{2(4+c)}}$

3. a) *Que retournent respectivement `rdm.randint(a,b)` et `rdm.random()` en langage Python ?*
La première fonction retourne un nombre entier pris au hasard dans l'intervalle $[\![a,b]\!]$ selon la loi uniforme. C'est-à-dire :

$$\text{Si } \texttt{X=rdm.randint(a,b)}, \text{ alors } \forall k \in [\![a,b]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$$

La seconde retourne un réel pris au hasard dans l'intervalle $[0,1[$ là aussi selon la loi uniforme. Autrement dit :

$$\text{Si } \texttt{Y=rdm.random()}, \text{ alors } \mathbb{P}(Y \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) *Écrivons une fonction `simulExp()` qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s et renvoie le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.*

On choisit de nommer `Nb` et `Nn` respectivement le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires au moment de chaque tirage.
Ainsi, au moment du premier tirage (`t = 1`), on a `Nb = 2 = Nn`.
On effectue les tirages jusqu'à obtenir une boule blanche, c'est-à-dire tant que on tire une boule noire. La probabilité de tirer une noire étant de `Nn/(Nb+Nn)`, il y a deux possibilités pour modéliser cette expérience, selon qu'on utilise `rdm.randint()` ou `rdm.random()`.
Dans le premier cas, on suppose les deux boules blanches numérotées 1 et 2, les boules noires noires étant numérotées de 3 à `N=Nb+Nn`. Alors, on tire une noire si, et seulement si, `rdm.randint(1,Nb+Nn)>2`.
Dans le second cas, on tire une noire si, et seulement si, `rdm.random()<=Nn/(Nb+Nn)`.
Nous choisissons ci-dessous la première écriture.

Pour autant, il ne faut pas oublier le cas où aucune blanche n'est tirée... Dans ce cas, on prévoie l'entier naturel `s`, suffisamment grand pour penser qu'au delà de cette valeur de `s`, la probabilité d'obtenir une blanche est proche de 0 (on a ajouté que des noires dans l'urne, en plus ou moins grand nombre selon la valeur de $c$...).
On répète donc les tirages TANT QUE on a une noire et que $t \leq s$.
Une fonction possible est donc la suivante :

```
def simulExperience(c,s):
Nb,Nn = 2,2
t = 1 # numéro du tirage
while rdm.randint(1,Nb+Nn)>2 and t<=s : # on tire une noire
    Nn += c # on ajoute c noires     t += 1
if t == s+1: # on a jamais obtenu de blanche au cours des s premiers tirages
    t = 0
return t
```

c) *Écrivons une fonction `estimEsp(c,s,m)` qui utilise `simulExp()` et qui permette, sans avoir à utiliser la bibliothèque `numpy`, d'estimer l'espérance de $X$ en simulant un grand nombre $m$ de fois l'expérience :*

```
def estimEsp(c,s,m):
    cpt = 0 # initalisation du compteur
    for k in range(m): # on répète m fois l'expérience
       cpt += simulExperience(c,s)
    return cpt/m
```

On nous donnait quelques résultats :

`estimEsp(0,10,1000) = 1.956` ; `estimEsp(0,50,1000) = 2.019` ;
`estimEsp(0,100,1000) = 2.011`

`estimEsp(1,10,1000) = 2.174` ; `estimEsp(1,50,1000) = 2.575` ;
`estimEsp(1,100,1000) = 2.880` ; `estimEsp(1,200,10000) = 3.0843`

`estimEsp(2,10,1000) = 2.09` ; `estimEsp(2,50,1000) = 3.533` ;
`estimEsp(2,100,1000) = 4.209` ; `estimEsp(2,500,10000) = 5.4888`

L'intuition nous laisse penser que, plus $c$ est grand, plus le temps moyen d'arrivée de la première boule blanche sera grand. Les résultats ci-dessus permettent d'appuyer cette première hypothèse.

Dans le cas $c = 0$, pour mille répétitions de l'expérience, on obtienne une moyenne proche de 2 qui vient conforter la valeur de $\mathbb{E}(X) = 2$ obtenue à la question 1.
Pour $c = 1$, les valeurs proposées montrent le rôle important de $s$. En effet, même si la probabilité d'obtenir une blanche au delà du centième tirage est faible ($\mathbb{P}(B_{100}) = 2/(4 + 99) = 2/103$) la moyenne des rangs de la première boule blanche continue d'augmenter quand $s$ varie de 10 à 200. Pour autant, ces valeurs laissent penser que $\mathbb{E}(X)$ est proche de 3.
Pour $c = 2$, plus $s$ augmente, plus la valeur de $\mathbb{E}(X)$ est grande (alors que, cette fois $\mathbb{P}(B_{100}) = 2/(4 + 99 * 2) = 2/202 = 1/101$). On peut faire l'hypothèse que $\mathbb{E}(X) > 5.5$ mais rien ne permet d'assurer sa valeur si elle existe...

✐ *Remarque :* En toute rigueur, d'un point de vue théorique, il faudrait ici citer le théorème central limite qui assure que, dans le cas d'une répétition indépendante d'une même variable aléatoire, d'espérance et de variance constante, alors la moyenne expérimentale converge vers l'espérance de cette variable aléatoire. C'est bien ce théorème qui permet de faire le lien entre le calcul statistique de la moyenne et l'estimation de l'espérance...
Ce étant, cette remarque fera l'objet d'un chapitre spécifique en fin d'année...

d) *Montrons comment il est possible d'utiliser* ***`simulExp()`*** *pour écrire une fonction* ***`estimProbZero(c,s,m)`*** *simulant un grand nombre $m$ de fois l'expérience et retournant une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$ :*

Il suffit de créer une liste formée des temps d'attente de la première boule blanche (ou d'un 0 si aucune blanche au cours des $s$ premiers tirages) et dénombrer les 0 de cette liste. En divisant par $m$, on calcule la fréquence d'apparition du 0 au cours de $m$ réalisations indépendantes de l'expérience. La loi faible des grands nombres (sur laquelle nous reviendrons également en fin d'année) nous assure que cette fréquence converge vers $\mathbb{P}(X = 0)$ lorsque $m$ tend vers l'infini.

On écrira ainsi :

```
def estimProbZero(c,s,m):
    return [simulExperience(c,s) for k in range(m)].count(0)/m
```

Voici quelques exemples d'exécution de cette fonction : `estimProbZero(1,100,1000) = 0.001` ; `estimProbZero(2,100,1000) = 0.011` ; `estimProbZero(5,100,1000) = 0.073`

On peut supposer que, quelle que soit la valeur de $c$, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ (y-compris si $c$ est grand....)

4. *Démontrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}$

   Il s'agit cette fois encore de la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_n) = \mathbb{P}(N_1) \cdots \mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}}(N_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+c}{4+c} \cdots \frac{2+(n-1)c}{4+(n-1)c}$$

   ***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}}$

5. On suppose dans cette question que $c = 1$.

   a) *Calculons* $\mathbb{P}(E_n)$ *pour tout entier naturel* $n$ *non nul :* C'est une application immédiate de ce qui précède.

   ***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+c}{4+c} = \frac{2 \cdot 3}{(2+n)(3+n)} \text{ par télescopages}}$

   b) *Montrons que :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(E_n)$ *pour en déduire la valeur de* $\mathbb{P}(X = 0)$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (X = k)\right) \text{ car événements incompatibles}$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{(X = k)}\right) = 1 - \mathbb{P}(E_n)$$

   Or, par définition d'une loi de probabilité, sachant que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on sait que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = k)$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

   D'où : $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

   Utilisons maintenant le début de la question... Soit $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$

   Si on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)$. Alors $S = \displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (1 - \mathbb{P}(E_n)) = 1$ puisque, d'après la question qui précède, $\mathbb{P}(E_n) \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{6}{n^2}$ tend vers 0 dans $n$ tend vers l'infini.

   Dès lors, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$ et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 - 1 = 0}$$

   c) *Démontrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. Pour tout $n$ entier non nul :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(E_{n-1} \cap B_n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) \cdot \mathbb{P}_{E_{n-1}}(B_n) = \frac{6}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{2}{4+(n-1)1}$$

   ***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

d) On souhaite montrer l'existence et calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

i. D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(X+3)$ existe si la série $\sum_{n\geq 0}(n+3)\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.
Le terme général de cette série étant positif, la convergence absolue n'est autre que la convergence de la série.
On note que :

$$\sum_{n\geq 0}(n+3)\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n\geq 1}\frac{12}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{12}{n+1}-\frac{12}{n+2}\right)$$

(✐ *Remarque :* on rappelle qu'on a démontré précédemment que $\mathbb{P}(X=0)=0$, ce qui explique qu'on ait commencé à $n=1$...)
C'est une série télescopique. On passe donc par sa somme partielle...

Soit $T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{12}{k+1}-\frac{12}{k+2}\right)=12\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$. Par télescopage,

$$T_n=12\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} T_n$ existe et vaut $\frac{12}{2}=6$.

***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{E}(X+3) \text{ existe et vaut } 6}$

ii. On peut en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en utilisant la linéarité de l'espérance.
En effet $\mathbb{E}(X+3)=\mathbb{E}(X)+3=6\Leftrightarrow\mathbb{E}(X)=6-3=3$.
Ceci confirme l'hypothèse faite en 3.c)

6. On suppose dans cette question que $c=2$.

a) *Calculons $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul et déduisons-en la valeur de $\mathbb{P}(X=0)$ :*
On exploite à nouveau la question 4. en prenant cette fois $c=2$. On obtient :

$$\mathbb{P}(E_n)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2+2k}{4+2k}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+k}{2+k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n+1}$$

Soit $\boxed{\mathbb{P}(E_n)=\frac{1}{n+1}}$ et donc $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(E_n)=0$

En reprenant le raisonnement mené en 5.c), on a : $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\lim_{n\to\infty}(1-\mathbb{P}(E_n))=1$.

Dès lors :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0)=1-\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=0}$$

b) *Donnons la loi de $X$ :*
Au regard de la question qui précède, on peut désormais considérer que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
Par ailleurs, pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(E_{n-1}\cap B_n)=\mathbb{P}(E_{n-1}\cdot\mathbb{P}_{E_{n-1}}(B_n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{4+(n-1)^2}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{P}(X=n)=\frac{2}{n(2n+2)}=\frac{1}{n(n+1)},\ \forall n\in\mathbb{N}^*}$

c) *La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ?* La réponse est non car la série

$$\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} \text{ est une série harmonique divergente}$$

Ce résultat confirme les résultats de la simulation faite en 3.c). A savoir, quand $c=2$, il est impossible de mettre en évidence expérimentalement une moyenne qui, plus `s` sera grand, plus elle sera importante...

7. On souhaite généraliser à tout $c$ entier naturel non nul, les valeurs de $\mathbb{P}(X=0)$ obtenues précédemment.

a) On utilise le résultat de 4. et on compose de chaque côté de l'égalité par le logarithme népérien. Dès lors :

$$\begin{aligned}\ln(\mathbb{P}(E_n)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2+kc}{4+kc}\right)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{4+kc}{2+kc}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{2}{2+kc}\right)\end{aligned}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{2}{2+kc}\right)}$

b) *Démontrons le résultat suivant : Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites positives et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature :*

Par définition : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$ Soit : $\forall n \geq n_0, 0 < \frac{v_n}{2} \leq u_n \leq \frac{3v_n}{2}$.

Il suffit d'appliquer par deux fois le théorème de convergence par comparaison sur les séries à termes positifs pour conclure :

– Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{v_n}{2}$ converge et donc $\sum v_n$ converge [inégalité de gauche]

– Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \frac{3v_n}{2}$ converge et donc $\sum u_n$ converge [inégalité de droite]

Par contraposition, on obtient que si $\sum v_n$ diverge alors c'est le cas de $\sum u_n$ et que si $\sum u_n$ diverge, alors c'est le cas de $\sum v_n$.

***Conclusion*** : $\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}}$

c) *Déterminons $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(E_n)$ pour en déduire $\mathbb{P}(X=0)$ :*

De la question 7.a), à l'aide de l'équivalent : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on déduit que

$$-\ln(\mathbb{P}(E_n)) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{2}{kc}$$

Or $\sum \frac{2}{kc}$ est de même nature que $\sum \frac{1}{k}$ qui est une série harmonique divergente.

Dès lors, par application du résultat rappelé en 7.b), on a : $-\ln(\mathbb{P}(E_n))$ diverge.
Ou encore $\underset{n\to\infty}{lim} (-\ln(\mathbb{P}(E_n))) = +\infty \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} (\ln(\mathbb{P}(E_n))) = -\infty \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(E_n) = 0$.

Toujours par ce même raisonnement utilisé eb 5.c) et 6.a), on déduit que $\boxed{\mathbb{P}(X=0)=0}$.

# Problème 3 :

① $\boxed{\text{L'effectif de la population après } s \text{ unités de temps, noté } Z_s\text{, vaut : } Z_s = \sum_{i=1}^{p} n_{s,i}}$.

② Soit $s \in \mathbb{N}$.

a) $n_{s+1,1}$ est l'effectif de la classe d'âge $C_1$ après $(s+1)$ unités de temps.
Or dans $C_1$ se trouvent exactement tous ceux qui viennent de naître entre l'instant $s$ et l'instant $s+1$. Il faut noter que les éléments qui étaient dans $C_1$ après $s$ unités de temps sont, un instant plus tard, soit morts, soit dans $C_2$, en tout cas ils ne sont plus dans $C_1$. Ainsi :

$$\boxed{n_{s+1,1} = n_{s,1}F_1 + n_{s,2}F_2 + \ldots + n_{s,p}F_p = \sum_{i=1}^{p} n_{s,i}F_i.}$$

b) Pour déterminer $N_{s+1}$ en fonction de $N_s$, il reste à déterminer $n_{s+1,i}$ pour $i \in [\![2,p]\!]$.

Il faut distinguer deux cas :

– Dans le cas de la dernière classe d'âge, le nombre d'individus dépend à la fois du nombre d'individus de la classe $C_{p-1}$ qui ont survécu selon le coefficient $P_{p-1}$ et du nombre d'individus qui étaient déjà dans cette dernière classe d'âge et qui ne sont pas mort, selon le taux $P_p$.
Dès lors : $n_{s+1,p} = n_{s,p-1} \times P_{p-1} + n_{s,p} \times P_p$.

– Pour toutes les autres classes, d'après les hypothèses du modèle, entre l'instant $s$ et l'instant $s+1$, le nombre d'individus dans les classes $C_i$ ($i \in [\![1,p-1]\!]$) dépend uniquement du nombre d'individus dans la classe d'âge $C_{i-1}$ qui précède et qui ont survécu selon un taux de survie désigné par la lettre $P_{i-1}$.
Soit $\forall i \in [\![2,p-1]\!], n_{s+1,i} = n_{s,i-1} \times P_{i-1}$

Ce qui peut se traduire sous la forme du système ci-dessous :

$$\begin{cases} n_{s+1,1} & = F_1 \times n_{s,1} + F_2 \times n_{s,2} + F_3 \times n_{s,3} + \ldots + F_{p-1} \times n_{s,p-1} + F_p \times n_{s,p} \\ n_{s+1,2} & = P_1 \times n_{s,1} \\ n_{s+1,3} & = P_2 \times n_{s,2} \\ \vdots & \vdots \\ n_{s+1,i} & = P_{i-1} \times n_{s,i-1} \\ \vdots & \vdots \\ n_{s+1,p-1} & = P_{p-2} \times n_{s,p-2} \\ n_{s+1,p} & = P_{p-1} \times n_{s,p-1} + P_p \times n_{s,p} \end{cases}$$

On traduit ceci matriciellement :

$$\boxed{N_{s+1} = MN_s \text{ avec } M = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \ldots & \ldots & F_{p-1} & F_p \\ P_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & P_{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 & P_{p-1} & P_p \end{pmatrix}}.$$

③ *Étude d'un exemple.*
*Nous considérons une population de drosophiles (la durée de vie d'une drosophile est inférieure à* 30 *jours). Nous choisissons une unité de temps u de* 10 *jours et nous découpons la population en* 3 *classes d'âge.*
*Après étude statistique, nous estimons que :*

$$F_1 = 0,\ F_2 = 13,\ F_3 = 12,\ P_1 = \frac{1}{4},\ P_2 = \frac{1}{2}.$$

a) Ici il y a trois classes d'âge donc, d'après 2.$c$) : $N_{s+1} = AN_s$ avec $A$ la matrice d'ordre 3 qui est donnée par : $A = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}$.

Avec les données de l'énoncé, les drosophiles ne pouvant survivre au-delà de 30 jours, on a donc $P_3 = 0$.
Dès lors, on a bien :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.}$$

b) Pour tout $s$ dans $\mathbb{N}$ montrons par récurrence que : $\mathcal{P}(s)$ : « $N_s = A^s N_0$. »
- Initialisation : Par définition $A^0 N_0 = I_3 N_0 = N_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : On fixe $s$ dans $\mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(s)$ vraie.
Alors $N_s = A^s N_0$. Ainsi $AN_s = A.A^s N_0 = A^{s+1} N_0$.
Or, d'après 3.$a$), $AN_s = N_{s+1}$. On a donc : $N_{s+1} = A^{s+1} N_0$. Et ainsi $\mathcal{P}(s+1)$ est vraie.
- Conclusion : le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(s)$ est vraie pour tout entier $s$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{N},\ \ N_s = A^s N_0.}$$

c) i. Soit $(S_\lambda)$ le système homogène $(A - \lambda I_3)X = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

*Montrons que le système $(S_\lambda)$ admet au moins une solution non nulle pour trois valeurs distinctes de $\lambda$ parmi lesquelles on trouve $\lambda = 2$ et $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.*
*Les trois valeurs de $\lambda$ seront notées $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ telles que : $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.*

Le système $(S_\lambda)$ admet pour seule solution la solution nulle si et seulement si son rang vaut 3.
En conséquence, il admet au moins une solution non nul si, et seulement si, son rang qui est aussi celui de sa matrice associée $A - \lambda I_3$, est différent de 3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow 4L_2; L_3 \leftarrow 2L_3) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ -\lambda & 13 & 12 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 13-4\lambda^2 & 12 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 13-4\lambda^2 & 12 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + (4\lambda^2-13)L_2)
\end{aligned}$$

où $P(\lambda)$ est le polynôme :

$$P(\lambda) = 12 - 2\lambda(4\lambda^2 - 13) = -2\Big(4\lambda^3 - 13\lambda - 6\Big).$$

Ainsi $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda$ est une racine de $P$, c'est à dire une racine de $Q(X) = 4X^3 - 13X - 6$.
On remarque que : $Q(2) = 4 \times 8 - 13 \times 2 - 6 = 0$ ; $Q(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{-4}{8} + \dfrac{13}{2} - 6 = 0$.
Ainsi on peut factoriser $Q$ pour chercher la dernière racine :

$$Q(X) = 4(X-2)(X+\frac{1}{2})(X-\alpha).$$

Lorsqu'on développe et qu'on ne s'intéresse qu'au terme constant, ce terme vaut : $4 \times (-2) \times (\frac{1}{2}) \times (-\alpha) = 4\alpha$. Or il doit être égal à $-6$, donc : $\alpha = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

En conclusion :

$$\boxed{A - \lambda I_3 \text{ non inversible si } \lambda_1 = 2\,;\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}\,;\ \lambda_3 = -\frac{1}{2}.}$$

On les a bien numérotées de façon à ce que $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$.

ii. *Résolvons ce système pour chacune des valeurs de $\lambda$ et donnons dans chaque cas un triplet solution de dernière coordonnée égale à 1. On nommera $v_1 = (a_1, b_1, 1)$, $v_2 = (a_2, b_2, 1)$ et $v_3 = (a_3, b_3, 1)$ les solutions respectives prises dans $(S_{\lambda_1})$, $(S_{\lambda_2})$ et $(S_{\lambda_3})$.*

Nous avons obtenu que la réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$ est : $B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$

donc $\boxed{(S_\lambda) \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow B_\lambda X = 0}$

- **Résolvons** $S_{\lambda_1}$ : Avec $\lambda_1 = 2$ :

$$(A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow B_2X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y & = 0 \\ y - 4z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 32z \\ y & = 4z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Donc $\boxed{S_{(\lambda=2)} = Vect(v_1)}$ avec $v_1 = (32, 4, 1)$.

- **Résolvons** $S_{\lambda_2}$ : Avec $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ :

$$(A + \frac{3}{2}I_3)X = 0 \Leftrightarrow B_{-3/2}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y & = 0 \\ y + 3z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 18z \\ y & = -3z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Donc $\boxed{S_{(\lambda=-3/2)} = Vect(v_2)}$ avec $v_2 = (18, -3, 1)$.

- **Résolvons** $S_{\lambda_3}$ : Avec $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ :

$$(A + \frac{1}{2}I_3)X = 0 \Leftrightarrow B_{-1/2}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 2z \\ y & = -z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Donc $\boxed{S_{(\lambda=-1/2)} = Vect(v_3)}$ avec avec $v_3 = (2, -1, 1)$.

iii. *Montrons que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ :*

– Montrons que cette famille est libre : Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3 / \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ $(*)$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 32\alpha_1 + 18\alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 & = 0 & L_1 \leftarrow L_3 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 & = 0 \\ 32\alpha_1 + 18\alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 & L_3 \leftarrow L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 & = 0 \\ -7\alpha_2 - 5\alpha_3 & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ -14\alpha_2 - 30\alpha_3 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 32L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 & = 0 \\ -7\alpha_2 - 5\alpha_3 & = 0 \\ -20\alpha_3 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3$$

***Conclusion*** : $\boxed{\text{La famille } (v_1, v_2, v_3) \text{ est libre}}$.

– De plus cette famille contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la dimension est connue et vaut 3, donc :

– ***Conclusion*** : $\boxed{\text{La famille } (v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

On note désormais $V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i) = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}$ et on écrira que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) **Comportement asymptotique de la population.**
Notons $(c_1, c_2, c_3)$ les coordonnées de $N_0$ dans la base $\mathcal{V}$.

i. *Montrons que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$ : $AV_i = \lambda_i V_i$ et plus généralement que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$ :*
Il suffit de noter que $v_i$ est solution du système homogène $(S_{\lambda_i})$. Autrement dit :

$$(A - \lambda_i I_3)V_i = 0 \Leftrightarrow AV_i - \lambda_i V_i = 0 \Leftrightarrow AV_i = \lambda_i V_i$$

Une récurrence immédiate prouve que $A^s V_i = \lambda_i^s V_i$.

ii. *Montrons que : $\forall s \in \mathbb{N}$, $N_s = (\lambda_1)^s c_1 V_1 + (\lambda_2)^s c_2 V_2 + (\lambda_3)^s V_3$.*

$$\begin{aligned} N_s &= A^s N_0 \quad \text{(d'après (3.2))} \\ &= A^s(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3) \\ &= c_1 A^s V_1 + c_2 A^s V_2 + c_3 A^s V_3 \\ &= (\lambda_1^s c_1)V_1 + (\lambda_2^s c_2)V_2 + (\lambda_3^s c_3)V_3. \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall s \in \mathbb{N}, \ \ N_s = (\lambda_1^s c_1)V_1 + (\lambda_2^s c_2)V_2 + (\lambda_3^s c_3)V_3.}$

iii. *En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$, on peut écrire :*

$$N_s = (\lambda_1)^s (c_1 V_1 + \varepsilon_s)$$

*où tous les coefficients de la matrice $\varepsilon_s$ ont pour limite 0 lorsque $s$ tend vers $+\infty$ :*

On a alors : $N_s = \lambda_1^s \big(c_1 V_1 + \varepsilon_s\big)$ avec : $\varepsilon_s = \big(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\big)^s c_2 V_2 + \big(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\big)^s c_3 V_3$.
Or $|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1$ et $|\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}| < 1$, donc $\lim\limits_{s \to +\infty} \big(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\big)^s = \lim\limits_{s \to +\infty} \big(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\big)^s = 0$. Ainsi on a bien :

$$\boxed{N_s = \lambda_1^s \big(c_1 V_1 + \varepsilon_s\big) \text{ avec les coefficients de } \varepsilon_s \text{ qui tendent tous vers 0 quand } s \text{ tend vers } +\infty.}$$

iv. *Montrons que les différents rapports $\dfrac{n_{s,1}}{n_{s,3}}$ et $\dfrac{n_{s,2}}{n_{s,3}}$ ont une limite finie lorsque $s$ tend vers $+\infty$ et la calculons.* On a, en notant $\varepsilon_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{s,1} \\ \varepsilon_{s,2} \\ \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}$ : $N_s = \lambda_1^s \begin{pmatrix} 32c_1 + \varepsilon_{s,1} \\ 4c_1 + \varepsilon_{s,2} \\ c_1 + \varepsilon_{s,3} \end{pmatrix}$.
Autrement dit :

$$\boxed{n_{s,1} = \lambda_1^s (32c_1 + \varepsilon_{s,1}) \quad ; \quad n_{s,2} = \lambda_1^s (4c_1 + \varepsilon_{s,2}) \quad ; \quad n_{s,3} = \lambda_1^s (c_1 + \varepsilon_{s,3}).}$$

Remarquons que $c_1$ est non nul. En effet, si $c_1 = 0$ on aurait : $N_s = (-3/2)^s c_2 V_2 + (-1/2)^s c_3 V_3$, ce qui rendrait des coordonnées de $N_s$ négatives pour certaines valeurs de $s$, ce qui est absurde (on signale aussi que par modélisation $c_1, c_2, c_3$ ne peuvent pas être tous nuls sinon la population est réduite à 0 individus dès le départ !).
On a ainsi, lorsque $s \to +\infty$ :

$$\boxed{\tau_1 = \frac{n_{s,1}}{n_{s,3}} = \frac{32c_1 + \varepsilon_{s,1}}{c_1 + \varepsilon_{s,3}} \to 32.} \qquad \boxed{\tau_2 = \frac{n_{s,2}}{n_{s,3}} = \frac{4c_1 + \varepsilon_{s,2}}{c_1 + \varepsilon_{s,3}} \to 4.}$$

**Interprétons** : A long terme, la répartition selon les classes d'âge dans la population sera environ la suivante : il y aura 32 fois plus d'individus dans la classe d'âge $C_1$ que dans $C_3$, et il y aura 4 fois plus d'individus dans la classe d'âge $C_2$ que dans $C_3$.