Exercice :

On souhaite résoudre l'équation différentielle $xy' + 2y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (E) sur un intervalle I.

① On suppose que $I = \mathbb{R}$.

a) En résolvant l'équation homogène (H_0) respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, montrer que (H_0) n'admet que la solution nulle sur I.

b) Déterminer une solution particulière de (E). On pourra utiliser, après l'avoir démontré, que

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$$

c) Montrer que (E) n'admet qu'une unique solution qu'on déterminera.

② On suppose désormais que $I = [1, +\infty[$ et on souhaite déterminer la solution de (E) telle que $y(1) = 1/2$.

a) Déterminer analytiquement cette solution.

b) Sachant que y est dérivable sur I, on approche $y'(x)$ par $\dfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$ pour h suffisamment petit.
En déduire pour toute solution y de (E) une expression de $y(x+h)$ en fonction de $y(x)$, $x \in I$ et écrire une fonction Python `resolutionE()` permettant de tracer une approximation numérique de la solution obtenue en 2.a)

Corrigé Exemple-Exercice-Equations-différentielles :

On souhaite résoudre l'équation différentielle $xy' + 2y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (E) sur un intervalle I.

① On suppose que $I = \mathbb{R}$.

a) *Résolvons l'équation homogène* (H_0) *respectivement sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et montrons que* (H_0) *n'admet que la solution nulle sur* I *:*
Sur $\mathbb{R}^*$, $(H_0) \Leftrightarrow y' + \dfrac{2}{x}y = 0$.
On pose $a(x) = \dfrac{2}{x}$. La fonction a est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et admet pour primitive sur chacun de ces intervalles la fonction A définie par $A(x) = 2\ln(|x|)$.
D'où :
– $\forall x > 0$, $y(x) = \lambda e^{-2\ln(x)} = \dfrac{\lambda}{x^2}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
– $\forall x < 0$, $y(x) = \mu e^{-2\ln(|x|)} = \dfrac{\mu}{x^2}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.
✐ Attention : Veiller à ne pas prendre la même constante sur chacun des intervalles..
Or, si y est solution de (H_0) sur $\mathbb{R}$ alors elle est nécessairement continue en 0. Elle doit donc être bornée au voisinage de 0.
On conclut que $\boxed{(H_0) \text{ n'admet que la fonction nulle comme solution sur } \mathbb{R}.}$

✐ *Remarque :* cette question est une question dite « de recollement ». Elle n'est a priori pas au programme de BCPST mais cet exercice montre comme y répondre si on est guidé (résolution sur chaque intervalle puis détermination des constantes pour que les solutions soient continues et dérivables sur $\mathbb{R}$).

b) *Déterminons une solution particulière de* (E) *:* Pas de solution « évidente ». On utilise la méthode dite de « variation de la constante » :
Soit $y_1(x) = \dfrac{c(x)}{x^2}$. Alors :

$$y_1'(x) = \frac{c'(x)x^2 - 2xc(x)}{x^4} = \frac{c'(x)}{x^2} - 2\frac{c(x)}{x^3}$$

Dès lors, en remplaçant dans (E), on obtient :

$$\frac{c'(x)}{x} - 2\frac{c(x)}{x^2} + 2\frac{c(x)}{x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Soit :

$$c'(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

Il est alors temps d'utiliser la relation proposée par l'énoncé, à savoir : $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$.
Commençons par la démontrer :

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x + x^3 - x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$$

D'où

$$c'(x) = x - \frac{x}{1+x^2} \text{ et donc } c(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Conclusion : $\boxed{y_1(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}}$

c) *Montrons que* (E) *n'admet qu'une unique solution qu'on déterminera :*
Il suffit de rappeler que l'ensemble des solutions de (E) s'obtient en additionnant l'ensemble des solutions de l'équation homogène à une solution particulière.
Or (H_0) n'admet que la solution nulle...

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \longmapsto \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right\}}$

② On suppose désormais que $I = [1, +\infty[$ et on souhaite déterminer la solution de (E) tq $y(1) = 1/2$.

a) *Déterminons analytiquement cette solution :*
Puisqu'on travaille sur $I = [1, +\infty[$ l'ensemble des solutions de (H_0) n'est plus restreint à la seule solution nulle.
Dès lors, toute solution du (E) sur I s'exprime sous la forme :

$$y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

Alors :

$$y(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Conclusion : $\boxed{\text{la solution cherchée est } y : x \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{\ln(2) - \ln(1+x^2)}{2x^2}}$

b) Écrivons une fonction Python `resolutionE()` permettant de tracer une approximation numérique de la solution obtenue en 2.a) :

On commence par écrire que $(E) \Leftrightarrow y' = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{2}{x}y = f(x, y(x))$ et on définit :
`f = lambda x,y:x/(1+x**2)-2*y/x`.
mais aussi la solution exacte :
`y0 = lambda x:1/2+(np.log(2)-np.log(1+x**2))/(2*x**2)`

Dès lors :

```
def resolutionE(a,h,f,y_ini)
   nbpas = int((a-1)/h)
   X = 1+h*np.arange(nbpas+1)
   Y = [0]*(nbpas+1)
   Y[0]=y_ini
   for k in range(nbpas):
      Y[k+1] = Y[k]+h*f(X[k],Y[k])
   return X,Y
```

```
def resolutionE(a,h,f,y_ini)
   nbpas = int((a-1)/h)
   X,Y = [0]*(nbpas+1),[0]*(nbpas+1)
   Y[0]=y_ini
   for k in range(nbpas):
      X[k+1] = X[k]+h
      Y[k+1] = Y[k]+h*f(X[k],Y[k])
   return X,Y
```

Pour comparer graphiquement les deux solutions :

```
def graphes():
   X0,Y0 = solApprochee(a,h,f,1/2)
   plt.plot(X0,y0(X0),'k-',label="val exacte de f")
   plt.plot(X0,Y0,'r-.',lw = 2,label="courbe approchée de f")
   plt.legend(loc='best')
```

On obtient alors :

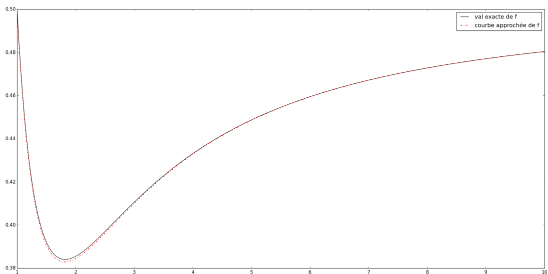

Figure 1 – Solution exacte et approchée ($h = 0.01$)