



- **Structure vectorielle** : Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs; sous-espaces vectoriels, intersection finie de ssev; ssev engendré par une famille finie de vecteurs
Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence); Famille libre, famille liée finie; Base finie d'un espace vectoriel et coordonnées d'un vecteur dans une base.
Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.
- **Dimension** : De toute famille génératrice finie d'un ev E on peut extraire une base.
Dans un ev de dimension n : Toute famille libre a au plus n éléments, une famille libre ayant n éléments est une base; toute famille génératrice a au moins n éléments, une famille génératrice ayant n éléments est une base. Si F est ssev de E alors $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales alors $F = E$.

Exercice 1 ★ : Dire dans chacun des cas suivants si les ensembles F sont sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels E donnés.

① $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n ($n = 2$ ou 3) :

- ① $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 0\}$
- ② $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ③ $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 3y = 1\}$
- ④ $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$
- ⑤ $F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$
- ⑥ $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$
- ⑦ $F_7 = \{(a, b, a + b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
- ⑧ $F_8 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_1 + \bar{z}_2 = 0\}$ où \mathbb{C}^2 est un \mathbb{C} -ev.
- ⑨ $F_9 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_1 + \bar{z}_2 = 0\}$ où \mathbb{C}^2 est un \mathbb{R} -ev.

② $E = \mathbb{R}[X]$ ou $E = \mathbb{R}_n[X]$:

- ① $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 1\}$
- ② $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \geq 3\}$
- ③ $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P' \text{ divise } P\}$
- ④ $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(2) = 0\}$
- ⑤ $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P(2) = 0\}$
- ⑥ $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = P'(1) = 0\}$
- ⑦ $F_7 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(X+1) - P(X) = 0\}$

③ $E = \mathbb{R}^I$ ou $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, ($n \in \mathbb{N}$)

- ① $F_1 = \{f \in \mathbb{R}^I / f \text{ constante sur } I\}$
- ② $F_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ croissante sur } \mathbb{R}\}$
- ③ $F_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$
- ④ $F_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 2\}$
- ⑤ $F_5 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f(x) + f(y) = 2 \cdot f((x+y)/2), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

- ⑥ $F_6 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f'(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
- ⑦ $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f''(x) = 3f'(x) - 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
- ⑧ $F_8 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f''(x) + f'(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

④ $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (n \in \mathbb{N})$

- ① $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t M = M\}$
- ② $F_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \exists p \in \mathbb{N}, M^p = 0\}$
- ③ $F_3 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$

Exercice 2 ★ : Dire si les familles suivantes sont libres dans l'espace E considéré

- ① $E = \mathbb{R}^3, F_1 = \{(1, 2, 3), (2, 1, 2), (1, 3, -1)\}$ et $F_2 = \{(1, 2, 3), (2, 1, 2), (1, -1, -1)\}$
- ② $E = \mathbb{C}^3, \mathbb{C}$ -ev; $F = \{(1, -1, i), (1, i, 1), (i - 1, 2, -2i)\}$
- ③ $E = \mathbb{R}_2[X], F = \{X, X(X - 1), X^2(X + 1)\}$
- ④ $E = \mathbb{R}_3[X], F = \{X^2, (X - 1)^2, (X + 1)^2\}$
- ⑤ $E = \mathbb{R}_3[X], F = \{3 + 3X + X^2 + X^3, 1 - X - X^2 + X^3, -1 - X + X^2 + X^3, X + 2X^2 + X^3\}$
- ⑥ $E = \mathbb{R}_n[X], F = \{X^{n-k}(1 + X)^k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ ☞ On pourra raisonner par récurrence
- ⑦ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f_1 : x \mapsto |x|, f_2 : x \mapsto 2|x|, f_3 : x \mapsto 1 + |x|, f_4 : x \mapsto 2 + |x|$ et $f_5 : x \mapsto x$
Les familles de vecteurs de E à étudier sont :

$$F_1 = \{f_1, f_2\}, F_2 = \{f_1, f_3\}, F_3 = \{f_1, f_5\}, F_4 = \{f_1, f_2, f_3\}, F_5 = \{f_1, f_3, f_4\} \text{ et } F_6 = \{f_1, f_3, f_5\}$$

- ⑧ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, F = \{x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin 2x\}$
- ⑨ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, F = \{x \mapsto e^{kx}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

Exercice 3 ★ : Donner une famille génératrice de chacun des espaces vectoriels suivants :

- ① $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y = 0 \text{ et } x = t\}$
- ② $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$
- ③ $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(a) = 0 = P(b)\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$
- ④ $H = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / y'' + y = 0\}$

Exercice 4 ★ : Bases

- ① Donner une base de chacun des ssev suivants, abordés dans l'exercice 1 sous les numéros suivants :

$$\mathbf{1.1), 2), 5), 6), 7), 8); \mathbf{2.4), 5), 6), 7); \mathbf{3.6), 7), 8)}$$

- ② Soit $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^*} / \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(x) = x(\alpha \ln^2(x) + \beta)\}$. Démontrer que F est un \mathbb{R} -ev et en donner une base.
- ③ Soit $F_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f^{(3)} = 0\}$ et $F_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{-6x} = 0\}$. Ces espaces vectoriels sont-ils de dimension finie ?
- ④ Soit la famille $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique \mathcal{B} avec

$$u_1 = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, u_2 = (-1, -1, 0)_{\mathcal{B}} \text{ et } u_3 = (-1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées de $v = (2, 2, 3)_{\mathcal{B}}$ dans cette nouvelle base.

⑤ Démontrer que dans l'ev $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

d'une part, et les matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'autre part, engendrent le même sous-espace vectoriel.

⑥ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$

a. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie.

b. Montrer que $M \in E \Leftrightarrow \exists(a, b, c) \in \mathbb{R} / M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$

c. Déterminer la dimension de E

d. Montrer que (I, A, A^2) est une base de E .

Exercice 5 ★ : rang d'une famille de vecteurs

En utilisant l'écriture matricielle d'une famille de vecteurs, déterminer le rang des familles finies suivantes :

- ① $\mathcal{F}_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1), (4, 2, 2)\}$
- ② $\mathcal{F}_2 = \{(1, -1, 0, 2, 1), (2, 1, 1, 3, -1), (0, 1, 1, 2, 1), (4, -2, 0, 5, 0)\}$
- ③ $\mathcal{F}_3 = \{1 - X + 2X^2, 3 + X + X^2, -3 - 5 + 4X^2\}$
- ④ $\mathcal{F}_4 = \{X + 3X^2, -1 + X, 2 + X^2, 4 + 5X + 6X^2\}$

Exercice 6 ** : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_n n nombres réels distincts. On définit des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$L_k(X) = \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

- ① Calculer $L_k(a_j)$ pour tout $(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$
- ② Montrer que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
- ③ Exprimer la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base \mathcal{L}
- ④ Soit $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Quel est le polynôme $\sum_{i=1}^n a_i^p L_i$?

Donner la matrice des coordonnées de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base \mathcal{L}

Exercice 7 ♥ : Oral Agro 2010

Dans le \mathbb{R} espace vectoriel E des fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1 : x \mapsto e^{-x}, f_2 : x \mapsto (x-1)e^{-x} \text{ et } f_3 : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}$$

- ① Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de F . On la notera \mathcal{B} .
- ② A toute fonction f de F , on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = f'$. Montrer que Φ est une application linéaire et que $\forall f \in F, \Phi(f) \in F$.
- ③ Ecrire la matrice A des coordonnées de la famille de vecteur $\mathcal{F}' = \{\Phi(f_1), \Phi(f_2), \Phi(f_3)\}$ dans la base \mathcal{B} . En déduire que \mathcal{F}' est une nouvelle base de F .
- ④ Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.