7 T.D. Révisions Nombres complexes et polynômes.

- ***Nombres complexes :*** Écriture algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. Représentation géométrique. Propriétés des conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe. Résolution des équations du second degré à coefficients réels. Somme et produit des racines. Définition de e^z, pour $z \in \mathbb{C}$. Formule $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
- ***trigonométrie :*** Définition, périodicité et symétrie des fonctions cos, sin et tan. Formules de trigonométrie $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$. Résolution d'équations trigonométrique du type : $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$ et $\tan(x) = t$. Transformation : $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = R\cos(\theta + \phi)$. Linéarisation de $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$
- ***Polynômes :*** Opérations sur les polynômes. Polynôme dérivé. Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée de polynômes. Racines d'un polynôme. Ordre de multiplicité et factorisation. Théorème de d'Alembert-Gauss. Condition de nullité d'un polynôme qui admet plus de racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) que son degré.

1 Nombres complexes

Exercice 1 ✶ : Linéarisation

Linéariser les expressions suivantes

$$A_1 = \cos^2(\theta),\ A_2 = \cos^2(\theta)\sin^3(\theta),\ A_3 = \cos^7(\theta) \text{ et } A_4 = \sin^7(\theta)$$

Exercice 2 ✶ : Formes algébriques et trigonométriques

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $A = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$

Exercice 3 ✶✶ : Étude de conjugaison et de module

① Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$

② Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^*$; On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$

a. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}$

b. En déduire que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$

Exercice 4 ✶ : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

① $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

② $(1 + \cos(2a))z^2 - 2\sin(2a)z + 2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. ✐ On donnera un argument de chacune des solutions.

Exercice 5 ✶✶ :

a et b étant deux réels fixés, déterminer r et φ tels que $a\cos x + b\sin x = r \cdot cos(x - \varphi)$.

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sin x + 2\sqrt{2}\sin x \cos x = 0$

✐ : On montrera au préalable que cette équation peut s'exprimer en fonction de $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 6 ✶✶ : Sommes usuelles

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(ka),\ S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos((k+1)a),\ C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$$

2 Polynômes

Exercice 7 ✶ : Équation polynomiale

En pensant aux propriétés du degré d'un polynôme, trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P' + XP = X^2 + 1$$

Exercice 8 ✶ : Racines d'un polynôme

Montrer que le polynôme $P = X^5 - 5X^4 + 3$ de $\mathbb{R}[X]$ admet exactement trois racines réelles notées a, b et c telles que

$$-1 < a < 0 < b < 1 < 4 < c < 5$$

Exercice 9 ✶ : Ordre de multiplicité

On considère le polynôme $P(X) = aX^6 + 7X^5 + 20X^4 + 31X^3 + bX^2 + 16X + 4$

① Déterminer a et b pour que P admette -1 pour racine double dans $\mathbb{C}$.

② Dans ces conditions, montrer que P admet deux racines doubles.

③ Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 10 ✶ :

Soit $A_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $B = X^2 - X + 1$ deux polynômes à coefficients réels.
On dira que B divise A_n si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A_n = B \cdot Q$.

① Montrer que l'équation $z^3 = 1$ admet trois racines dans $\mathbb{C}$ qu'on nommera respectivement z_0, z_1 et z_2 (on parlera par la suite de « racines cubiques de l'unité »).

a. Donner leur expression algébrique et trigonométrique et les situer sur le cercle trigonométrique.
b. Que vaut $z_0 + z_1 + z_2$?
c. Déterminer pour $k \in [\![0, 2]\!]$: z_k^{3n}, z_k^{3n+1} et z_k^{3n+2} pour tout n entier naturel.

② Déterminer les racines de B. Les situer sur le cercle trigonométrique et les exprimer en fonction des racines cubiques de l'unité.

③ Montrer que pour tout n entier naturel *les* racines de B sont *des* racines de A_n. En déduire que B divise A_n quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 11 ✶✶ :

① Exprimer $\tan(7\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$

② Soit $P = X^3 - 21X^2 + 35X - 7 \in \mathbb{R}_3[X]$. Exprimer $\tan(7\theta)$ en fonction de P, $\tan(\theta)$ et $\dfrac{1}{\tan(\theta)}$.

③ En déduire que les racines de P sont les réels $\alpha_k = \tan^2 \dfrac{k\pi}{7}$ où $1 \leq k \leq 3$.

④ Rappeler le lien entre racines et coefficients d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels et étendre ce résultat aux polynômes à coefficients réels de degré 3. En déduire la valeur de

$$S = \frac{1}{\cos^4(\pi/7)} + \frac{1}{\cos^4(2\pi/7)} + \frac{1}{\cos^4(3\pi/7)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\cos^4(k\pi/7)}$$

Exercice 12 ✶✶ :

En pensant à nouveau au lien entre racines et coefficients d'un polynôme à coefficients réels de degré 3, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} & = 1 \end{cases}$$

Exercice 13 ✶✶✶ : Approximation polynomiale

On considère une série $S = \{M_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2, k \in [\![0, n]\!]\}$ dont on cherche à faire l'interpolation par un polynôme de degré n. Il s'agit de déterminer un polynôme L de degré minimal (ici n) qui vérifie $P(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

① Construire un polynôme $l_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $l_0(x_0) = 1$ et $l_0(x_i) = 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
k étant fixé ($0 \leq k \leq n$), en déduire l'expression de $l_k \in \mathbb{R}_n[X] / l_k(x_k) = 1$ et $l_k(x_i) = 0, \forall i \in [\![0, n]\!] \backslash \{k\}$.

② En déduire, par combinaison linéaire des polynômes l_k, l'expression d'un polynôme L tel que :

$$L \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } L(x_k) = y_k \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n.$$

✐ Ce polynôme est appelé *polynôme interpolateur de Lagrange.*

③ *Premier exemple* : Soit $S = \{M_0(-2, 3), M_1(1, 2), M_2(2, -1), M_3(5, 2)\}$. Écrire les polynômes l_k pour $0 \leq k \leq 3$ et les tracer dans un même graphe sur l'intervalle $[-3, 6]$ en utilisant les couleurs respectives « rouge », « jaune », « vert » et « bleu ». Tracer ensuite en noir, d'un trait plus épais, le polynôme $L = 3L_0 + 2L_1 - L_3 + 2L_4$ et vérifier qu'il passe par chacun des quatre points de S.

④ *Second exemple* : On dispose grâce au site Publithèque de MétéoFrance de données quotidiennes de vitesses de vents prises à 10 mètres d'altitude à proximité de Nantes.

Jours	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vitesses ($m.s^{-1}$)	9	5.2	5.7	4.7	4.8	-	-	6.9	6.3	6.4

Certaines données sont manquantes. En considérant les vitesses de vents les jours 3, 4 et 7, déterminer un polynôme de degré 2 passant par ces trois points et en déduire une estimation possible pour les vitesses de vents les jours manquants 5 et 6.

⑤ *Troisième exemple*[1] *:* On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Pour ça, à condition que l'amplitude de l'intervalle de $[a, b]$ ne soit pas trop grande, on choisit d'approximer le graphe de f par un arc de parabole qui coïncide avec $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses a, $m = \dfrac{a+b}{2}$ et b.
Montrer que :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(m) + f(b))$$

Vérifier cette approximation en calculant la valeur exacte et approchée de $I_1 = \displaystyle\int_{1/2}^{3/2} te^{-t}dt$

En considérant maintenant une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de la forme $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ où $a_k = a + k \cdot pas$ avec $pas = \dfrac{b-a}{n}$, justifier en posant $m_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ que :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6} \cdot \frac{b-a}{n}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right]$$

En déduire une fonction Python `approxIntegrale(f,a,b,n)` permettant d'obtenir une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et vérifier la qualité de cette approximation en prenant cette fois les exemples :

$$I_2 = \int_0^4 te^{-t}dt \text{ et } I_3 = \int_0^{\pi/2} sin^2(t)\cos(t)dt$$

1. On lira en préalable à cette question la partie 2. du notebook `td0BCPST2d-revisionsIntegration` consacré aux révisions d'intégration de BCPST1