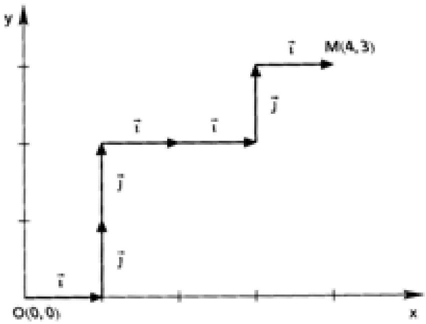
Devoir maison 3 : Dénombrements

Exercice 5 ⋆⋆ : marcher sur une grille.

Dans un système d'axes (Ox), (Oy), un chemin OM qui relie l'origine O à un point M de coordonnées entières m et n est une succession de segments de longueur 1, parallèles à Ox ou Oy, dans le sens des coordonnées croissantes (cf exemple ci-dessous)



1. Déterminer le nombre de chemins OM possibles.

2. De la même façon, d'un point P de coordonnées entières p et q on peut rejoindre les points $(p, q+1)$ ou $(p+1, q)$. Déterminer le nombre de chemins PM.

3. Parmi les chemins qui joignent l'origine au point $M(5,4)$, déterminer combien passent par le point $A(3,1)$, combien par $B(4,3)$, combien par ces deux points, par l'un au moins de ces deux points, par aucun de ces deux points.

Exercice 6 ⋆⋆⋆ : Dénombrement des parties de $[\![1, n]\!]$ contenant 2 entiers consécutifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E_n = [\![1, n]\!]$.
On pose $A_n = \{X \in \mathcal{P}(E_n) / \exists i \in [\![1, n-1]\!], i \in X, (i+1) \in X\}$ et on note B_n le complémentaire de A_n dans $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n est l'ensemble des parties de E_n contenant deux entiers consécutifs et l'ensemble B_n, l'ensemble des parties de E_n ne contenant pas deux entiers consécutifs.

1. Donner trois éléments de A_6 puis quatre éléments de B_{10}.

2. Dire pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles A_n et B_n sont finis.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \text{Card}(A_n)$ et $b_n = \text{Card}(B_n)$. Déterminer les valeurs a_1, a_2, b_1 et b_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les ensembles $H = \{X \in B_{n+2}/(n+2) \in X\}$ et $K = \{X \in B_{n+2}/(n+2) \notin X\}$, trouver une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

4. Donner une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

5. Ecrire un programme dans le langage de votre choix permettant de mettre en évidence un entier naturel n_0 pour lequel la proportion dans $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n contenant deux entiers consécutifs est supérieure ou égale à 80%.
   Montrer que pour tout $n \geq n_0$, cette proportion reste la même.