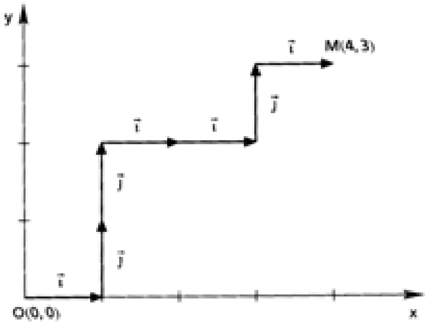
D.L.3 Dénombrements

4

Exercices extraits du td04 - bcpst2 - septembre 2018

Exercice 7 ⋆⋆ : marcher sur une grille.

Dans un système d'axes (Ox), (Oy), un chemin OM qui relie l'origine O à un point M de coordonnées entières m et n est une succession de segments de longueur 1, parallèles à Ox ou Oy, dans le sens des coordonnées croissantes (cf exemple ci-dessous)



1 *Déterminons le nombre de chemins OM possibles :*
Pour relier l'origine 0 au point M il y a $m+n$ pas à faire dont m sont faits dans la direction de l'axe des x et n sont faits parallèlement à Oy.
Il y a donc autant de chemins possibles que de façon de placer sans répétition les m pas parallèles à l'axe Ox parmi $m+n$ pas. Les n pas parallèles à Oy sont alors nécessairement placés.
Remarque : On pourrait imaginer coder par un 0 tout déplacement horizontal et par un 1 tout déplacement vertical. Un chemin devient alors assimilable à un $(m+n)$-uplet de symboles 0 et 1 dont m symboles sont 0 et n symbole sont 1.
Pour coder un chemin de O à $M(m,n)$ il suffit alors de choisir les rangs des m symboles 0. Les n symboles 1 sont alors placés.
Il y a $\binom{m+n}{m}$ tels uplets de ce type.

Conclusion : $\boxed{\text{Le nombre de chemins } OM \text{ possibles vaut donc } \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}}$

2 De la même façon, d'un point P de coordonnées entières p et q on peut rejoindre les points $(p,q+1)$ ou $(p+1,q)$. *Déterminons le nombre de chemins PM :*

- *Premier cas :* Si $p>m$ ou $q>n$ alors il n'existe pas de chemin de P vers M.
- *Second cas :* Si $p\leq m$ et $q\leq n$, alors il est possible de considérer un nouveau système d'axes (Px) et (Py) pour lequel l'origine est en P et les axes sont parallèles aux anciens.
  Dans ce nouveau repère, le point M a pour nouvelles coordonnées $(m-p, n-q)$.

Alors d'après la question 1. on a immédiatement :

Conclusion : $\boxed{\text{Il y a } \dbinom{(m-p)+(n-q)}{m-p} \text{ chemins de } P \text{ à } M}$.

3 *Parmi les chemins qui joignent l'origine au point $M(5,4)$,*

a. *déterminons combien passent par le point $A(3,1)$:*

- Il y a $\dbinom{4}{3}$ chemins de 0 à A d'après la question 1.
- Pour chacun de ces chemins, il y a d'après la question 2. : $\dbinom{(5-3)+(4-1)}{5-3} = \dbinom{5}{2}$ chemins reliant A à M.

Par application du lemme des bergers (indépendance de ces évènements) :

Conclusion : $\boxed{\text{Il y a : } \dbinom{4}{3} \cdot \dbinom{5}{2} = 40 \text{ chemins passant par } A}$

b. *déterminons combien passent par $B(4,3)$:* L'argument est le même que précédemment. Notons $ch(PQ)$ le nombre de chemins de P à Q et $ch_R(PQ)$ ceux d'entre eux qui passent par R.
Alors :

$$ch_B(0M) = ch(OB) \cdot ch(BM) = \binom{7}{4} \cdot \binom{2}{1} = 2 \cdot \binom{7}{4} = 70$$

c. *déterminons combien passent par ces deux points, par l'un au moins de ces deux points, par aucun de ces deux points :*

- Soit $ch_{A\cap B}(0M)$ le nombre de chemin de 0 à M passant par A et par B.
  Alors :
  $$ch_{A\cap B}(0M) = ch(0A) \cdot ch(AB) \cdot ch(BM) = \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 4.3.2 = 24$$
- Soit $ch_{A\cup B}(0M)$ le nombre de chemins de 0 à M passant par A ou B.
  Alors,
  $$ch_{A\cup B}(OM) = ch_A(OM) + ch_B(OM) - ch_{A\cap B}(OM) = 40 + 70 - 24 = 86$$
- Pour obtenir le nombre de chemins ne passant ni par A ni par B il suffit de passer par l'évènement contraire.
  A savoir :
  $$ch_{\bar{A}\cap\bar{B}}(OM) = ch(0M) - ch_{A\cup B}(0M) = \binom{9}{5} - 86 = 126 - 86 = 40$$

Exercice 8 - T.D.3 ★★★ : Dénombrement des parties de $[\![1,n]\!]$ contenant 2 entiers consécutifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E_n = [\![1,n]\!]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n est l'ensemble des parties de E_n contenant deux entiers consécutifs et l'ensemble B_n, l'ensemble des parties de E_n ne contenant pas deux entiers consécutifs.

① *Donnons trois éléments de A_6 :* Il suffit de prendre des parties de $E_6 = [\![1,6]\!]$ contenant deux éléments consécutifs. Par exemples :
$X_1 = \{1,2,5\}$, $X_2 = \{1,3,4,6\}$ ou encore $X_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$ sont trois éléments de A_6.

Donnons quatre éléments de B_{10} : Il suffit de prendre quatre parties de $E_{10} = [\![1,10]\!]$ qui ne contiennent pas deux éléments consécutifs. Par exemples :
$X_1 = \{1,3,5,7\}$, $X_2 = \{2,5\}$, $X_3 = \{3\}$ et $X_4 = \{2,5,8,10\}$ sont quatre éléments de B_{10}.

② *Indiquons pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles A_n et B_n sont finis :*
Il suffit de dire que $A_n, B_n \subset \mathcal{P}(E_n)$ et de rappeler que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E_n)) = 2^n$.
Donc $\mathrm{Card}(A_n) \leq 2^n$ et $\mathrm{Card}(B_n) \leq 2^n$.
Conclusion : $\boxed{A_n \text{ et } B_n \text{ sont deux ensembles finis.}}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = Card(A_n)$ et $b_n = Card(B_n)$. Déterminons les valeurs a_1, a_2, b_1 et b_2 :

- Pour $n = 1$, $E_1 = \{1\}$; $\mathcal{P}(E_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$ donc $A_1 = \emptyset$ et $B_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$.
  D'où $\boxed{a_1 = 0 \text{ et } b_1 = 2}$.

- Pour $n = 2$, $E_2 = [\![1,2]\!] = \{1,2\}$; $\mathcal{P}(E_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
  donc $A_2 = \{\{1,2\}\}$ et $B_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.
  D'où $\boxed{a_2 = 1 \text{ et } b_2 = 3}$

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *En considérant les ensembles $H = \{X \in B_{n+2} / (n+2) \in X\}$ et $K = \{X \in B_{n+2} / (n+2) \notin X\}$, trouvons une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n :*
On commence par noter que H et K forment une partition de B_{n+2}, autrement dit que :

$$H \cup K = B_{n+2} \text{ et } H \cap K = \emptyset$$

On en déduit que

$$\mathrm{Card}(B_{n+2}) = b_{n+2} = \mathrm{Card}(H) + \mathrm{Card}(K)$$

Or K est l'ensemble des parties de $[\![1,n+1]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.
Donc $K = B_{n+1}$ et $\mathrm{Card}(K) = b_{n+1}$.

Pour H... commençons par noter que tout élément X de H contient $(n+2)$ et donc pas $(n+1)$ (sans quoi il serait dans A_{n+2}). Il y a donc autant d'éléments dans H que dans B_n.
Autrement dit : $\mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(B_n) = b_n$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1,\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n}$

④ *Donnons une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n :*
On rappelle que B_n est le complémentaire de A_n dans $\mathcal{P}(E_n)$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n = 2^n$.
Dès lors :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2^{n+2} - b_{n+2} = 2^{n+2} - b_{n+1} - b_n = 2^{n+2} - (2^{n+1} - a_{n+1}) - (2^n - a_n) \\ &= a_{n+1} + a_n + 2^n \times (4 - 2 - 1) = a_{n+1} + a_n + 2^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2^n}$

⑤ *Écrivons un programme en Python permettant de mettre en évidence un entier naturel n_0 pour lequel la proportion dans $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n contenant deux entiers consécutifs est supérieure ou égale à 80% :*

Il faut noter que la proportion dans $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n contenant deux entiers consécutifs est : $p_n = \dfrac{a_n}{2^n}$.
Puisque $a_n + b_n = 2^n$, on a : $p_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$.
Il s'agit donc de chercher un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $p_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n} \geq \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$.
Autrement dit :

Cherchons n_0 tel que pour tout $n \geq 0$, $a_n \geq 4b_n$

```
def proportion():
    a1,a2=0,1
    b1,b2=2,3
    n=1
    while a2<4*b2
          a1,a2=a2,a2+a1+2**n
          b1,b2=b2,b2+b1
          n=n+1
    return n+1,a2,b2
```

Cette fonction, une fois appelée par : `n0,a2,b2=proportion()` nous retourne :

$$n0 = 9,\ b_9 = 89 \text{ et } a_9 = 423 > 4 * b_9$$

Enfin, pour montrer que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \geq 4b_n$, il suffit de faire une récurrence sur deux rangs :

- C'est vrai pour $n = 9$ et $n = 10$ (on a $a_{10} = 880 > 4 * 144$ où $b_{10} = 144$)
- On suppose que $a_n \geq 4b_n$ et $a_{n+1} \geq 4b_{n+1}$ pour n fixé ($n \geq 9$)
- Alors : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2^n \geq 4b_{n+1} + 4b_n + 2^n \geq 4(b_{n+1} + b_n) = 4b_{n+2}$
- ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \geq 9, \text{ quatre parties sur cinq de } [\![1, n]\!] \text{ contiennent 2 entiers consécutifs}}$