4 T.D.4 Dénombrements

Les objectifs : Cardinal d'une union (disjointe ou pas) ; Cardinal d'un produit cartésien, des p-listes, des p-listes sans répétition, des permutations et des p-combinaisons d'un ensemble E à n éléments.
Capacités : Modéliser une situation combinatoire au moyen d'un vocabulaire précis ; mener un calcul de dénombrement ;

Exercice 1 ✶ :

On teste le groupe sanguin de 12 individus : 7 sont du groupe O, 3 du groupe A et 2 du groupe B. Le sang de chacun est conservé dans un flacon individuel. On prélève trois flacons. Combien y a-t-il de prélèvements possibles ? Combien, parmi ces prélèvements, amènent trois flacons du même groupe ?

Exercice 2 ✶ : ordre et répétition... ou pas.

Une classe comporte 39 étudiants.

① En fin de journée, après la fin des cours, 3 salles d'études sont à la disposition des étudiants. De combien de façons peuvent se répartir dans ces trois salles les 15 étudiants qui ont décidé de rester travailler au lycée ?

② La salle de cours comporte 42 chaises. De combien de façons différentes les étudiants peuvent-ils s'asseoir ?

③ A la fin de l'année, chaque étudiant présente individuellement son TIPE devant ses professeurs. Les passages sont répartis sur 6 demi-journées, à savoir 5 fois sept étudiants puis quatre étudiants. De combien de façons peut-on organiser ces passages ?

④ Combien peut-on faire de groupes de colles (trinômes) distincts dans cette classe ?

Exercice 3 ❤ : Tirages avec et sans remise

I/ On extrait successivement n boules **avec remise** d'une urne U.

① On suppose cette urne U composée de N boules de deux couleurs différentes c_1 et c_2 (supposées numérotées). On note p_1 et p_2 les proportions respectives de boules de couleur c_1 et c_2.

- **a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- **b.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1 puis r_2 boules de couleur c_2 ?
- **c.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1 ?

② L'urne U est cette fois composée de N boules de trois couleurs distinctes notées c_1, c_2 et c_3 dans les proportions respectives p_1, p_2 et p_3.

- **a.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1, r_2 boules de couleur c_2 puis r_3 boules de couleur c_3 dans cet ordre ?
- **b.** Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1, r_2 boules de couleur c_2 et r_3 boules de couleur c_3 ?

II/ On extrait **par poignée** n boules d'une urne U.
On suppose cette urne U composée de N boules (éventuellement numérotées) de deux couleurs différentes c_1 et c_2 dans les proportions respectives p_1 et p_2.

① Combien y a-t-il de tirages possibles ?

② Combien de tirages amènent r_1 boules de couleur c_1 ?

③ Répondre à nouveau à ces deux questions si les tirages ont lieu successivement sans remise.

III/ Modélisation.

On travaillera avec la bibliothèque `random` et on se rapportera pour de l'aide sur ces questions au notebook « td3bcpst2-denombrement ».

On précise que `randint(start,stop)` de la bibliothèque `random` fournit un nombre entier aléatoire compris entre `start` et `stop` (ces deux valeurs étant incluses) et que `random()` fournit un nombre réel aléatoire compris dans l'intervalle $[0,1[$.

① **Lancers d'une pièce de monnaie.**

a. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Écrire une fonction qui simule cette expérience aléatoire et retourne une liste formée de 1 si « Pile » est obtenu, de 0 sinon. Modifier votre fonction pour obtenir le nombre de « Pile » obtenus au cours de ces n lancers.

b. Proposer une fonction permettant de simuler m expériences (avec m grand) telle que celle décrite ci-dessus et retournant la fréquence d'apparition des « Pile » au cours de n lancers.

② **Tirages avec remise.**

a. *Version 1 :* On effectue n tirages avec remise dans une urne composée de 7 boules blanches et 3 boules noires. Écrire une fonction `tirageARv1.py` qui utilise la fonction `randint()` et simule cette expérience aléatoire en retourne une liste formée de 1 à chaque fois qu'une boules blanches est tirée, 0 sinon.

b. *Version 2 :* Une urne est composée de boules blanches en proportion p_1 $(0 < p_1 < 1)$. On effectue n tirages avec remise dans cette urne. Écrire une fonction `tirageARv2.py`dont les paramètres d'entrée sont p_1 et n, qui utilise cette fois la fonction `random()` et qui modélise sous forme de liste le résultats de ce tirage.

c. Proposer une fonction Python `freqBoulesBlanches(m,n,p)` permettant de simuler m expériences (avec m grand) telles que celle décrite ci-dessus et retournant la fréquence d'apparition de k boules blanches pour $k \in [\![0,n]\!]$.

d. On suppose cette fois l'urne composée de N boules de trois couleurs distinctes. Proposer une fonction `tirageAR-3C.py` qui modélise sous forme de liste n tirages avec remise dans cette urne.

③ **Tirages sans remise.**

a. Compléter la fonction `tirageSR.py` afin de modéliser un tirage successif sans remise de n boules dans une urne composée de N boules dont un proportion p_1 est blanche.

b. Compléter la fonction `freqB-tirageSR.py` qui simule la réalisation de $m = 1000$ tirages avec remise de n boules dans une urne composée d'une proportion p_1 de boules blanches et qui retourne un tableau de 2 lignes, $n+1$ colonnes, formé sur la première ligne du nombre de boules blanches possibles et sur la seconde des fréquences respectives du nombre de boules blanches obtenues au cours des 1000 tirages.

Exercice 4 ✶ : Anagrammes

Combien existe-t-il d'anagrammes :

① du mot MATH ?

② du mot COLLOSCOPE ?

Exercice 5 ❤ : Obtention de formules combinatoires

I/ Formule de Pascal.
On suppose un ensemble E de cardinal n. Soit $a \in E$. On prélève p éléments de E. En mettant en évidence une partition de l'ensemble des tirages possibles, retrouver la formule de Pascal.

II/ Formule du binôme de Newton.
On considère une urne U composé de $N = a + b$ boules dont a sont blanches. On effectue n tirages successifs avec remise.

① Déterminer le cardinal des tirages possibles.

② Soit T_k l'événement : « k boules sont blanches parmi les n boules tirées ». Déterminer $\text{Card}(T_k)$ en précisant les valeurs de k.

③ Mettre en évidence une partition de Ω et conclure sur la formule du Binôme de Newton.

III/ Formule $\displaystyle\sum_{k=a}^{n} \binom{k}{a} = \binom{n+1}{a+1} = S.$

① *Démonstration combinatoire.* On considère une urne U contenant $n+1$ boules dont b sont noires et $a+1$ sont blanches. On extrait les boules une à une jusqu'à vider l'urne.

a. Combien de tirages différents sont possibles ?
b. Soit M_k l'événement : « La dernière boule blanche occupe la $(k+1)$-ième place ». Déterminer $\text{Card}(M_k)$ pour des valeurs de k qu'on précisera.
c. En déduire la formule annoncée.

② *Démonstration algébrique par télescopages* : A savoir écrire en utilisant la formule de Pascal et les télescopages.

Exercice 6 ✶✶ : Les escaliers

En BCPST2, pour venir en maths, selon son retard ou son envie, on monte un escalier en franchissant les marches une à une ou deux par deux.

① On note p_n le nombre de façon dont on peut enchaîner les pas de une marche et les pas de deux marches pour gravir l'escalier formé de n marches. Ainsi, à titre d'exemple, s'il n'y a qu'une marche, $p_1 = 1$, s'il y a deux marches, $p_2 = 2$ puisqu'il y a deux façons de gravir l'escalier, en 2 pas ou en une seule foulée de 2 marches.

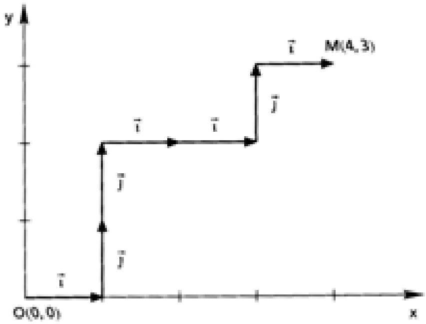
a. Déterminer p_3 et p_4.
b. Déterminer une relation de récurrence liant p_n, p_{n-1} et p_{n-2}.
c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

② On appelle k le nombre de pas de deux marches que l'on peut faire pour gravir un escalier de n marches.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour k ?
b. Calculer en fonction de k le nombre total de pas nécessaires.
c. Déterminer le nombre de façon dont on peut opérer en faisant k pas de deux marches.
d. En déduire une expression de p_n sous forme d'une somme.

Exercice 7 ⋆⋆ : marcher sur une grille.

Dans un système d'axes (Ox), (Oy), un chemin OM qui relie l'origine O à un point M de coordonnées entières m et n est une succession de segments de longueur 1, parallèles à Ox ou Oy, dans le sens des coordonnées croissantes (cf exemple ci-dessous)



① Déterminer le nombre de chemins OM possibles.

② De la même façon, d'un point P de coordonnées entières p et q on peut rejoindre les points $(p, q+1)$ ou $(p+1, q)$. Déterminer le nombre de chemins PM.

③ Parmi les chemins qui joignent l'origine au point $M(5,4)$, déterminer combien passent par le point $A(3,1)$, combien par $B(4,3)$, combien par ces deux points, par l'un au moins de ces deux points, par aucun de ces deux points.

Exercice 8 ⋆⋆⋆ : Dénombrement des parties de $[\![1, n]\!]$ contenant 2 entiers consécutifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E_n = [\![1, n]\!]$.
On pose $A_n = \{X \in \mathcal{P}(E_n) / \exists i \in [\![1, n-1]\!], i \in X, (i+1) \in X\}$ et on note B_n le complémentaire de A_n dans $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble A_n est l'ensemble des parties de E_n contenant deux entiers consécutifs et l'ensemble B_n, l'ensemble des parties de E_n ne contenant pas deux entiers consécutifs.

① Donner trois éléments de A_6 puis quatre éléments de B_{10}.

② Dire pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles A_n et B_n sont finis. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \text{Card}(A_n)$ et $b_n = \text{Card}(B_n)$. Déterminer les valeurs a_1, a_2, b_1 et b_2.

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les ensembles $H = \{X \in B_{n+2} / (n+2) \in X\}$ et $K = \{X \in B_{n+2} / (n+2) \notin X\}$, trouver une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

④ Donner une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

⑤ Écrire une fonction Python permettant de mettre en évidence un entier naturel n_0 pour lequel la proportion dans $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n contenant deux entiers consécutifs est supérieure ou égale à 80%.
Montrer que pour tout $n \geq n_0$, cette proportion reste la même.