2 T.D.2 Fonctions

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ;
Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont les techniques se retrouvent à l'écrit ; Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou bien qui font appel à de l'algorithmique dans l'esprit de l'oral ou de l'épreuve B de l'Agro.

Les objectifs : Reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien (ln), fonctions exponentielle $x \longmapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, fonction logarithme décimal (log), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, fonctions circulaires, partie entière ($\lfloor \cdot \rfloor$) et valeur absolue ($| \cdot |$).
Calculs de dérivées et de primitives en vue d'applications à la physique et aux équations différentielles.
Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions $\sqrt[n]{}$ et arctan). Résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.
Dérivation : Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, recherche d'extremum, dérivées d'ordre supérieur.
Développements limités (développements usuels : exp, cos, sin, $x \longmapsto 1/(1+x)$, $x \longmapsto ln(1+x)$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$). Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées.

Exercice 1 ✶ : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

$a) \lim\limits_{x\to 0} (ln(sinx) - lnx)$; $\quad b) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(1/x)}{e^{1/x}+1}$; $\quad c) \lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-sinx}$; $\quad d) \lim\limits_{x\to 0} \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

$e) \lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \right)$; $\quad f) \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{ln(x)+x}$; $\quad g) \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$; $\quad h) \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln(1+e^x)}{x}$

$i) \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{cos(ax)-cos(a)}{e^{-ax^2}-e^-a} (a>0)$; $\quad j) \lim\limits_{x\to a} \dfrac{sin^2x - sin^2a}{x^2-a^2}$;

$k) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tanx - sinx}{x^3}$; $\quad l) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^x-1}{x}$; $\quad m) \lim\limits_{x\to +\infty} \left(xe^{1/x} - x \right)$; $\quad n) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sqrt{1+sinx}}-e}{tanx}$

Exercice 2 ✶ : Continuité

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)e^x$$

Indication : Raisonner par analyse/synthèse en montrant que si f vérifie la relation demandée et qu'on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, alors $g(2x) = g(x)$ pour tout x réel et qu'en conséquence $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ pour tout entier n. Il vous restera à prouver que g est constante égale à $f(0)$ et à conclure.

Exercice 3 ✶ : Continuité

Soit f une application continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l \ (l<1)$;
Montrer que f admet un point fixe (*Remarque :* On pourra faire intervenir la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$).

Exercice 4 ✶ : Fonctions usuelles

① Résoudre $\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x & = -5 \\ xy & = e \end{cases}$

② Ensemble de définition, parité et tableau de variation de $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^2+2x}$;
Montrer que la droite d'équation $(x=-1)$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$

③ Calculer $S = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{8}\right)$
En déduire $T = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Exercice 5 ✶ : Dérivabilité des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad ; \quad g : x \mapsto \begin{cases} x^2 sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad ; \quad h : x \mapsto \begin{cases} x sin(\frac{\pi}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 ✶ : Dérivées $n$ième

① Calculer pour tout n entier naturel : $\ln^{(n)}(x)$.

② Donner la dérivée $n$ième de f_n définie par $f_n(x) = x^{n-1} ln(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

Exercice 7 ✶✶ : Dérivées de fonctions réciproques

① Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $I = [-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1,1]$. On note A la réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle I.

② Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

④ Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

⑥ **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

b. Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

Exercice 8 ✶✶ : Dérivées de fonctions réciproques

On considère deux fonctions ch et sh définies respectivement par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

① Calculer $ch^2(x) - sh^2(x)$
② Etudier la fonction ch sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et en déduire sa bijectivité sur un intervalle qu'on précisera.
③ Expliciter sa réciproque appelée $Argch$ et donner sa dérivée par deux méthodes différentes.

Exercice 9 ❤ : Th. de Rolle et F. des Accroissements finis

① Montrer les inégalités suivantes :
a. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$
b. $\forall x \in [0, \pi/2],\ sinx \leq x$
c. $\forall x \in [0, +\infty[,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq Arctanx \leq x$

② Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) \leq -3$. Montrer que :

$$\exists! y \in \mathbb{R} / f(y) = 2y$$

③ *Application de la formule des accroissements finis à l'étude des suites récurrentes :*
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$
a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \in [0, 1]$.
b. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que : $\dfrac{e^\lambda}{e^\lambda + 1} = \lambda$. Démontrer que $\lambda \in]0, 1[$.
c. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \lambda| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \lambda|$
d. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite. En donner une valeur approchée grâce à Python.

Exercice 10 : ✶ ✶

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}$ et la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$f(x_n) = x_{n+1},\ x_0 \in]0, 1[$$

① Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution c sur l'intervalle $]0, 1/2[$.
② Étudier la monotonie de la suite (x_n).
③ Étudier la convergence de la suite (x_n) et écrire une fonction Python permettant le calcul de x_n pour toute valeur entière de n entrée par l'utilisateur.
④ Donner une valeur approchée à ε près de la limite de (x_n) en utilisant l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous :

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Exercice 11 ✶ : Développements limités

Déterminer les développements limités suivants :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ à l'ordre 2 en 0 ; 2) $\ln\left(\dfrac{1}{cosx}\right)$ à l'ordre 4 en 0 ;

3) $(ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0 ; 4) $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 ; 5) $Arctan(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;

6) $\dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 3 en 0 ; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre n en 0

Exercice 12 ❤ : Développements limités

Soit f définie par $f(x) = Arctan\,(ln(1+x))$.

① Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et montrer qu'elle est bijective de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

② Donner un $DL_3(0)$ de f. En déduire un $DL_3(0)$ de f^{-1}.

Exercice 13 ✶✶ : Application des développements limités

① Soit f, fonction définie sur $[0, \pi/4]$ par : $f(x) = (1 - 2sinx) \cdot tan(3x)$.
Déterminer son ensemble de définition et déterminer sa continuité et sa dérivabilité sur cet ensemble.

② Soit la fonction f définies par : $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$.
Déterminer son ensemble de définition et étudier les branches infinies de f en précisant les positions de la courbe par rapport à ses asymptotes.

③ Mêmes questions pour f définie par $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$.