

Remarque

Classement des exercices

Une \star signale une application directe des formules du cours ;

Les exercices marqués d'un \heartsuit indiquent des exercices classiques dont les techniques se retrouvent à l'écrit ; Enfin les $\star\star$ à $\star\star\star$ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou bien qui font appel à de l'algorithmique dans l'esprit de l'oral ou de l'épreuve B de l'Agro.



Les objectifs : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n -ième terme. Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes. Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Croissances comparées : $a^n = o(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = o(a^n)$ (avec $\alpha > 0$) Suites équivalentes.

Exercice 1 \star : Les suites usuelles

Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par $u_0 = v_0 = 2$ et indiquer leur nature.

Écrire dans un second temps et pour chaque cas une fonction Python permettant de représenter graphiquement leurs n premiers termes (n étant proposé par l'utilisateur).

- ① $u_{n+1} = u_n + 3$; $v_{n+1} = v_n - 5$
- ② $u_{n+1} = 3u_n$; $v_{n+1} = v_n/2$
- ③ $u_{n+1} = 3u_n + 3$; $v_{n+1} = \frac{v_n + 1}{2}$

Exercice 2 \star : Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Même questions pour les suites (u_n) définies par récurrences par :

- ① $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1, u_1 = 4$.
- ② $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_1 = 1, u_2 = 3$
- ③ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = 1, u_1 = 2$

Exercice 3 \star : Croissances comparées et suites équivalentes

Déterminer le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{lll}
 a) u_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 2}; & b) u_n = \frac{(-1)^n n^2 + 2n - 1}{n^2 - n + 2}; & c) u_n = n \ln \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \right); \\
 d) u_n = \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n; & e) u_n = \ln(\cos(e^{-n})); & f) u_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + n \sin(n)}; \\
 g) u_n = \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1; & h) u_n = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right); & i) u_n = n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}
 \end{array}$$

Exercice 4 ★ :

Montrer qu'une suite arithmétique est caractérisée par la propriété suivante : « Chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit ».

Exercice 5 ★ :

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies respectivement par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

- ① Montrer que ces suites sont adjacentes et qu'elles convergent. On admettra qu'elles ont pour limite commune e .
- ② Écrire une fonction qui, sans utilisation de fonctions Python prédéfinies, calcule les termes u_n et v_n jusqu'à ce que $|u_n - v_n| = v_n - u_n < 10^{-6}$ et retourne $\frac{u_n + v_n}{2}$.

Exercice 6 ♥ :

Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u et v deux suites respectivement définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

- ① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- ② Conclure que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge. On notera par la suite S sa limite.
- ③ En notant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \ln(2)$
- ④ En distinguant selon la parité de n , montrer que $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire un moyen d'obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près de $\ln(2)$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ★★ :

Soit f fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-x}$.

- ① Étudier f et donner son allure dans un repère sur lequel on aura pris soin de tracer la droite d'équation $(y = x)$. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ② Utiliser le graphe de f pour montrer la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.
- ③ Retrouver ce résultat en étudiant la monotonie de la suite (u_n) sans l'aide de la fonction f .
- ④ Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -u_n^2$ puis que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 : ★★★

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

- ① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

- ② **Modélisation** : A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$. Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python, Geogebra ou Excel. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

– $a_0 = a$ et $b_0 = b$

– Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α .

③ Étude mathématique :

a. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x .
En déduire la monotonie de la suite (α_n) .

b. Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l .
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n) .