

## Correction devoir surveillé 1 : Suites numériques et fonctions

### Cours :

1. ... se rapporter au cours...

### Exercice :

Montrons que les deux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes :

1. Sens de variation de  $(u_n)_{n \geq 0}$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

2. Sens de variation de  $(v_n)_{n \geq 0}$  :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2}$ . La suite  $(v_n)$  est décroissante.

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .

**Conclusion :** les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

### Problème : Variations autour des modèles discrets de dynamique des populations

On nous rappelle que dans le modèle malthusien, l'accroissement relatif de population est indépendant de  $P$  et on a :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Des modèles ont donc été imaginés qui pallient cette difficulté en montrant que de grandes valeurs de  $P_n$  conduisent à de plus petites valeurs de  $P_{n+1}$ . Nous allons aborder ici deux modèles de ce type qui mettent en évidence, en dehors de tout phénomène extérieur à la population (de type prédation), les effets d'une compétition entre individus.

Dans ces deux cas, les hypothèses préalables qui doivent être vérifiées sont : la variation par individu  $\frac{\Delta P}{P}$  doit être nulle pour  $P = K$ , positive si  $P < K$  et négative si  $P > K$ .

## Partie I : Présentation des modèles.

On considère les expressions suivantes qui ne dépendent plus linéairement de  $P$  :

$$\frac{\Delta P}{P} = e^{r(1-P/K)} - 1 \text{ et } \frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1 \text{ où } r, K \in \mathbb{R}_+^*, R_0 = r + 1 \text{ et } M = \frac{K}{R_0 - 1}$$

① Montrons dans chaque cas que l'accroissement relatif  $\Delta P/P$  vérifie les hypothèses précédentes :

a) Premier cas :  $\frac{\Delta P}{P} = e^{r(1-P/K)} - 1$

Si  $P = K$ , alors  $1 - \frac{P}{K} = 0$  et donc  $\frac{\Delta P}{P} = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

De plus :

$$P < K \Leftrightarrow \frac{P}{K} < 1 \text{ car } K > 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{P}{K} > 0 \Leftrightarrow e^{r(1-P/K)} > 1 \text{ car la fonction exp est croissante et } r > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta P}{P} > 0$$

Ce qui prouve que le premier modèle vérifie les premières hypothèses concernant la capacité d'accueil de l'environnement.

b) Second cas :  $\frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1$  où  $r, K \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $R_0 = r + 1$  et  $M = \frac{K}{R_0 - 1}$

Si  $P = K$ , alors  $\frac{P}{M} = \frac{K}{M} = R_0 - 1$ . Donc  $1 + \frac{P}{M} = R_0$  et  $\frac{\Delta P}{P} = 1 - 1 = 0$ .

Par ailleurs :

$$P < K \Leftrightarrow \frac{P}{M} < \frac{K}{M} \text{ car } M > 0 \text{ puisque } r > 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{P}{M} < 1 + R_0 - 1 = R_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_0}{1 + P/M} > 1 \text{ car } 1 + \frac{P}{M} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1 > 0$$

Ce qui suffit à justifier que le second modèle vérifie également les premières hypothèses concernant la capacité d'accueil de l'environnement.

② On regarde ce qui se passe pour de petits effectifs de population, autrement dit  $P_n \sim 0$ .

- Dans le premier modèle :  $r \cdot (1 - P/K) \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r$ .

Si on suppose par ailleurs que le taux intrinsèque  $r$  d'accroissement naturel (lié aux seules fécondité et mortalité) est proche de zéro, alors

$$e^{r(1-P/K)} - 1 \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r(1 - P/K) \sim r$$

Autrement dit, sous la condition de faibles valeurs de  $r$ , on a pour de petits effectifs de population :  $\frac{\Delta P}{P} \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r$

- Dans le second modèle :  $\frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0 - 1 - \frac{P}{M}}{1 + \frac{P}{M}} = \frac{r - \frac{P}{M}}{1 + \frac{P}{M}}$

D'où

$$\frac{\Delta P}{P} \underset{P \rightarrow 0}{\sim} r$$

**Conclusion :** Les deux modèles se comportent donc, lorsque les effectifs de la population sont faibles, comme des modèles malthusiens. Autrement dit, les phénomènes de compétition et la disponibilité des ressources sont supposés ne jouer aucun rôle sur le développement de la population lorsque les individus ne sont pas nombreux.

*Note :* Le premier modèle sera appelé par la suite « modèle de Ricker », le second « modèle de Beverton-Hott ».

## Partie II : Analyse mathématique.

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = xe^{r(1-\frac{x}{K})}$  et  $g(x) = \frac{R_0 x}{1 + \frac{x}{M}}$

① Associons à chaque modèle la relation  $P_{n+1} = f(P_n)$  et la relation  $P_{n+1} = g(P_n)$  :

a) *Modèle de Ricker :*

$$\frac{\Delta P}{P} = e^{r(1-P/K)} - 1 \Leftrightarrow P_{n+1} - P_n = P_n (e^{r(1-P_n/K)} - 1) \Leftrightarrow P_{n+1} = P_n e^{r(1-P_n/K)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

On a donc  $P_{n+1} = f(P_n)$  avec  $f : x \mapsto xe^{r(1-x/K)}$ .

b) *Modèle de Beverton-Hott :*

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1 \Leftrightarrow P_{n+1} - P_n = \frac{R_0 P_n}{1 + P_n/M} - P_n \Leftrightarrow P_{n+1} = \frac{R_0 P_n}{1 + P_n/M}, \forall n \in \mathbb{N}$$

On a donc  $P_{n+1} = g(P_n)$  avec  $g : x \mapsto \frac{R_0 \cdot x}{1 + x/M}$  avec  $R_0 = r + 1$  et  $M = \frac{K}{R_0 - 1} = \frac{K}{r}$

② a) *Modèle de Ricker :* Étudions  $f$  définie par  $f : x \mapsto xe^{r(1-x/K)}$  :

i.  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  par composition et produit de fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .

ii.  $\forall x \geq 0, f'(x) = e^{r(1-x/K)} - \frac{rx}{K} e^{r(1-x/K)} = \left(1 - \frac{rx}{K}\right) e^{r(1-x/K)}$

iii.  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{rx}{K} \geq 0$  car  $e^{r(1-x/K)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$

Dès lors,  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{rx}{K} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{K}{r}$  car  $r, K > 0$

iv. On a de façon évidente  $f(0) = 0$ .

Déterminons la limite de  $f$  en l'infini :  $f(x) = xe^{r(1-x/K)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} xe^{-rx/K}$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } x \underset{+\infty}{=} o(e^{ax}) \text{ avec ici } a = \frac{r}{K} > 0$$

La courbe représentant  $f$  admet donc une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

$x$	0	$K/r$	$+\infty$
$f'(x)$	$e^r$	+	0 -
$f(x)$	0	$M$ 	

b) *Modèle de Beverton-Hott* : Étudions  $g : x \mapsto \frac{R_0 \cdot x}{1 + x/M}$ .

i.  $M > 0$  donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$

ii.  $\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{R_0(1 + x/M) - \frac{R_0}{M}x}{(1 + x/M)^2} = \frac{R_0}{(1 + x/M)^2} > 0$

iii. On a  $g(0) = 0$ .

iv.  $g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{R_0 x}{\frac{x}{M}} = R_0 M = \frac{r+1}{r} K = L$ .

On en déduit que la courbe représentant  $g$  admet en l'infini une asymptote horizontale d'équation  $y = L$  avec  $L > K$  car  $\frac{r+1}{r} > 1$

v. Tableau de variation :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$r+1$	+
$g(x)$	0	$L$ 

③ Recherche des points fixes, c'est-à-dire des réels  $x$  tels que :  $x \in \mathbb{R}_+ / f(x) = x$  :

a) *Modèle de Ricker* :

$$f(x) = x \Leftrightarrow xe^{r(1-x/K)} = x \Leftrightarrow x [e^{r(1-x/K)} - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{r(1-x/K)} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } r(1 - x/K) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = K$$

$f$  admet donc deux points fixes :  $x^* = 0$  ou  $x^* = K$

Observons le deuxième point fixe  $x^* = K$ .

- Si  $0 < r < 1$ , alors  $x_m = \frac{K}{r} > K$

- Si  $r > 1$ , alors  $\frac{K}{r} < K$

b) *Modèle de Beverton-Hott* - Recherche des points fixes :

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{R_0 x}{1 + x/M} = x \Leftrightarrow x \left[ \frac{R_0}{1 + x/M} - 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } R_0 = 1 + \frac{x}{M} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = M(R_0 - 1) = K$$

$g$  admet donc, comme  $f$ , deux points fixes :  $x^* = 0$  ou  $x^* = K$

④ Tracé de l'allure des courbes en faisant apparaître la droite d'équation ( $y = x$ ).

a) *Modèle de Ricker* : On note deux comportements distincts, selon que l'abscisse du maximum de la courbe est à gauche du point fixe  $K$  ou à droite.

Cette condition revient à évaluer :  $\frac{K}{r} < K \Leftrightarrow r > 1$ .

Dès lors, la première courbe correspond à  $r < 1$  et la seconde à  $r > 1$ .

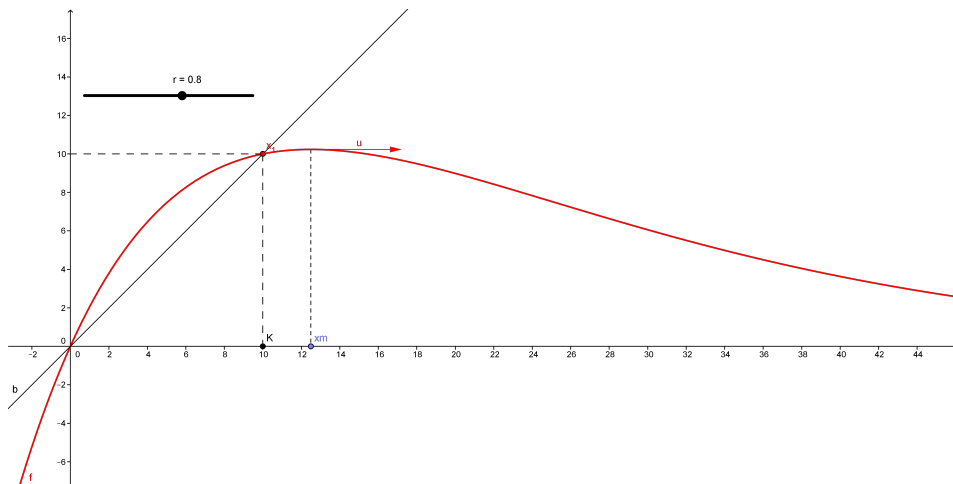


FIGURE 1 – Ricker pour  $r < 1$

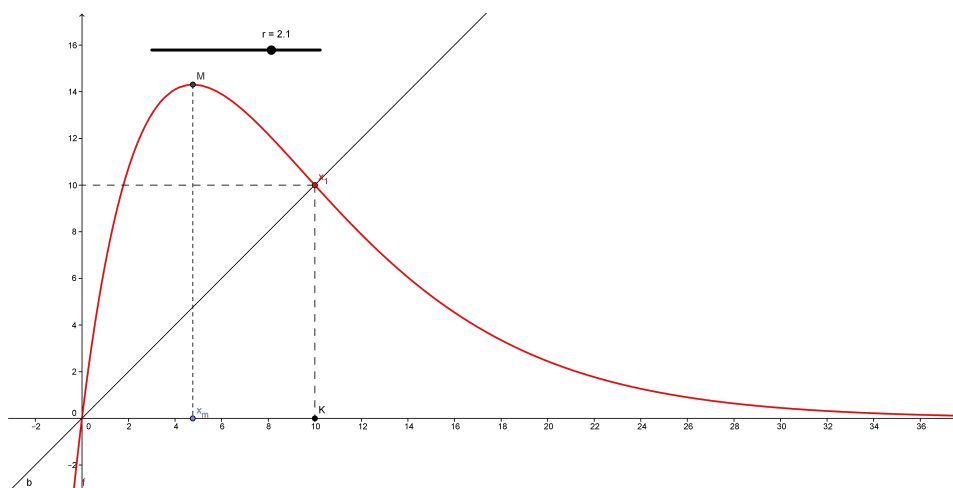


FIGURE 2 – Ricker pour  $r > 1$

b) *Modèle de Beverton-Hott :*

Nous obtenons le graphe suivant :

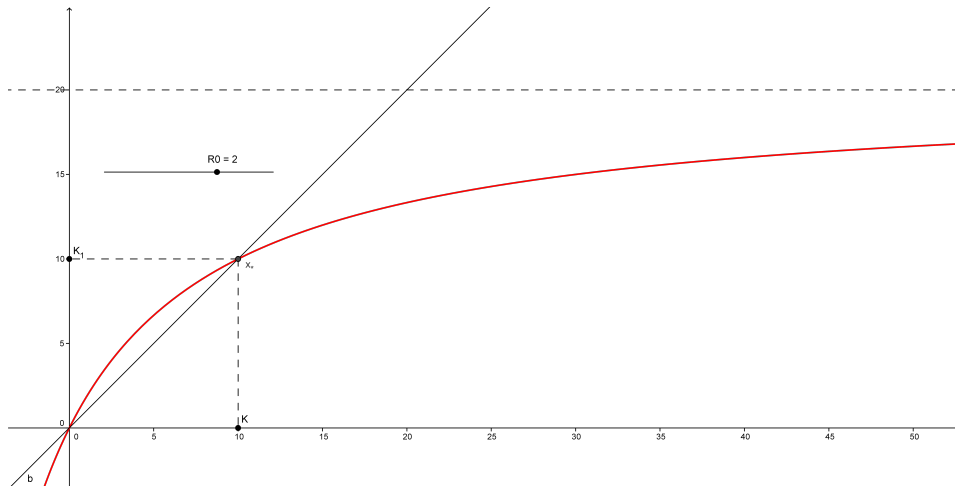


FIGURE 3 – Beverton-Hott

⑤ *Déterminons les états stationnaires pour les modèles de Ricker et de Beverton-Hott :*

Par définition, tout état stationnaire est une solution constante du modèle.

Autrement dit, les états stationnaires vérifient  $f(x^*) = x^*$  et  $g(x^*) = x^*$

D'après la question 2., les modèles de Ricker et de Beverton-Hott ont donc les mêmes états stationnaires, à savoir  $x_1^* = 0$  et  $x_2^* = K$ .

*Déterminons les conditions sur  $r$  pour que, dans chacun des deux modèles, les états d'équilibres soient stables ou instables :*

a) *Modèle de Ricker :* On rappelle que  $\forall x \geq 0, f'(x) = \left(1 - \frac{rx}{K}\right) e^{r(1-x/K)}$

– Pour  $x_1^* = 0, f'(0) = e^r$  donc  $|f'(x_1^*)| > 1$  puisque  $r > 0$ .

**Conclusion :**  $x_1^* = 0$  est un état stationnaire instable.

– Pour  $x_1^* = K, f'(K) = (1 - r)e^0 = 1 - r$ .

Si  $0 < r < 1$ , alors  $0 < 1 - r < 1$  donc  $|f'(K)| < 1$

Si  $r > 1$ , alors  $1 - r < 0$  et plus précisément,  $1 - r < -1 \Leftrightarrow r > 2$ . Dès lors,

$|f'(K)| < 1$  si  $1 < r < 2$  et  $|f'(K)| > 1$  si  $r > 2$

**Conclusion :**  $x_2^* = K$  est un état stationnaire instable si  $r > 2$ , stable si  $r \in ]0, 1[ \cup ]1, 2[$

b) *Modèle de Beverton :* On rappelle que  $\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{R_0}{(1 + x/M)^2}$

– Pour  $x_1^* = 0, g'(0) = R_0 = 1 + r > 1$  donc  $|g'(x_1^*)| > 1$ .

**Conclusion :**  $x_1^* = 0$  est un état stationnaire instable pour le modèle de Beverton.

– Pour  $x_1^* = K, g'(K) = \frac{R_0}{(1 + K/M)^2} = \frac{R_0}{R_0^2} = \frac{1}{R_0} < 1$  car  $R_0 > 1$ .

**Conclusion :**  $x_2^* = K$  est un état stationnaire stable pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$

## Interprétation des modèles.

- ① Si  $0 < r < 1$  et  $P_0 < K$  étudions les suites  $(P_n)$  dans chaque modèle :

Dans les deux cas (Ricker et Beverton-Hott), on note que l'intervalle  $I = [0, K]$  est stable par  $f$  et par  $g$ . Dès lors, si  $P_0 < K$  alors par récurrence, on montre que  $P_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Par ailleurs, les deux courbes sont au-dessus de la première bissectrice sur  $I$ . Donc la suite  $(P_n)$  est dans chaque cas croissante et majorée par  $K$ .

$f$  et  $g$  étant continues sur  $I$ , elle converge vers  $x \in I / f(x) = x$ , à savoir  $(P_n)$  converge vers  $K$ .

- ② On suppose les paramètres suivants :  $K = 10, r = 0.7, P_0 = 29$ .

Associons à chacune des évolutions ci-dessous le modèle de Ricker ou de Beverton-Hott :

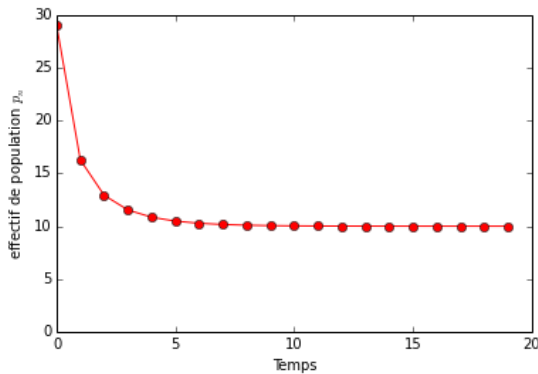


FIGURE 4 – Jeu d'essai 1.1

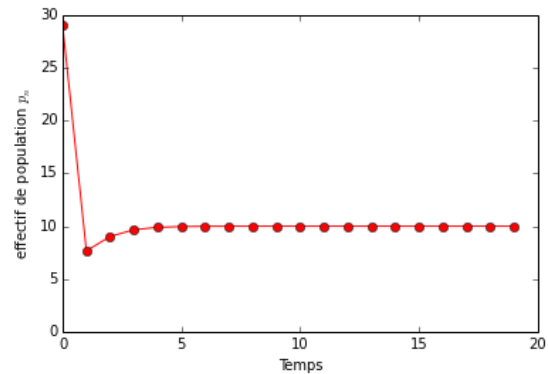


FIGURE 5 – Jeu d'essai 1.2

Nous avons  $r = 0.7$  donc dans chacun des modèles la capacité d'accueil  $K = 10$  est un état stationnaire stable. Ce que confirment les deux graphes.

La population initiale  $P_0 = 29$  est très supérieure à la capacité d'accueil du milieu.

Si on observe la courbe représentant  $f$  associée au modèle de Ricker, on note que  $f(P_0) \approx 6$  autrement dit  $P_1 < 10$ . Par ailleurs,  $I = [0, K]$  est stable par  $f$  qui est croissante sur cet intervalle, donc la suite  $(P_n)$  est monotone à partir de  $n = 1$ , majorée par  $K$ . Elle converge.

**Conclusion :** Le jeu d'essai 1.2 représente le modèle de Ricker.

Si on observe maintenant la courbe représentant  $g$ , on note qu'elle est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

L'intervalle  $I_2 = [10, +\infty[$  est stable par  $g$  et  $P_0 = 29 \in I_2$  donc la suite  $(P_n)$  est monotone à partir de  $n = 0$ . La courbe est par ailleurs sous la droite d'équation  $(y = x)$  donc  $P_{n+1} < P_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit la suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  est monotone, décroissante.

**Conclusion :** Le jeu d'essai 1.1 représente le modèle de Beverton-Hott.

- ③ Même question avec les paramètres :  $K = 10, r = 1.7$  et  $P_0 = 14$  (jeux d'essai 5.1 et 5.2).

Nous avons cette fois  $r = 1.7$ . Encore une fois les deux modèles ont  $K = 10$  comme état stationnaire stable.

Dans le cas du modèle de Beverton-Hott, pour tout  $P_0 \in \mathbb{R}_+$ , la suite  $(P_n)$  qui découle de l'équation logistique :  $P_{n+1} = g(P_n)$  est monotone puisque  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

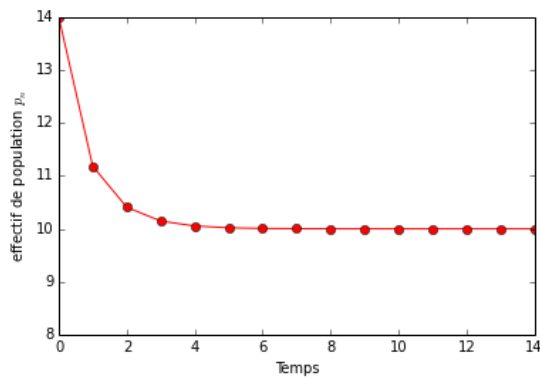


FIGURE 6 – Jeu d'essai 2.1

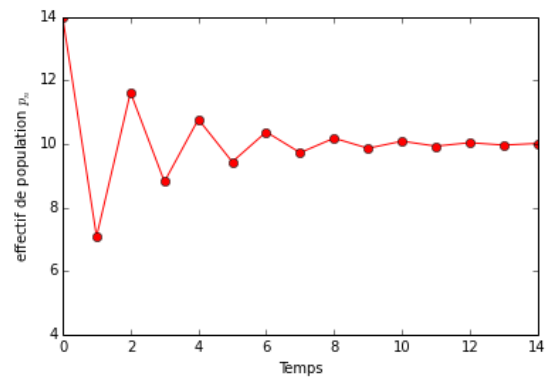


FIGURE 7 – Jeu d'essai 2.2

**Conclusion :** Le jeu d'essai 2.1 est issue du modèle de Beverton-Hott, l'autre de Ricker

On considère maintenant les paramètres  $K = 10$ ,  $r = 2.3$  et  $P_0 = 5$  (jeux d'essai 5.3 et 5.4).

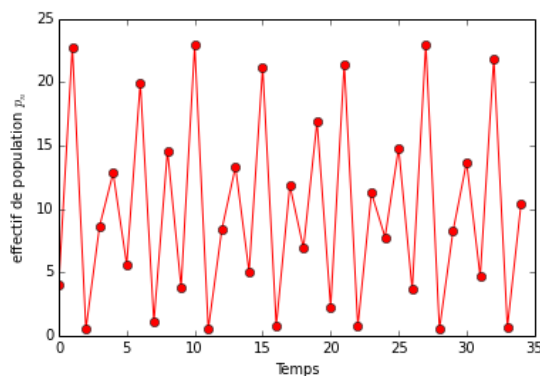


FIGURE 8 – Jeu d'essai 3.1

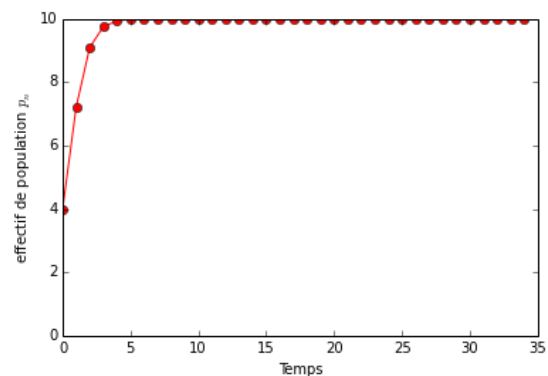


FIGURE 9 – Jeu d'essai 3.2

$r = 2.3 > 1$  donc la capacité d'accueil est stable pour le modèle de Beverton-Hott et instable pour le modèle de Ricker. La figure 3 illustre cette instabilité.

**Conclusion :** Le jeu d'essai 3.1 illustre le modèle de Ricker, l'autre celui de Beverton.

- ④ Écrivons une fonction Python *Dynamique* qui permette, connaissant  $K$ ,  $r$ ,  $P_0$  et  $n$  de déterminer la liste  $(P[0], P[1], \dots, P[n])$  des effectifs successifs de la population selon le modèle considéré :

```
def logistique(K,r,P0,n,a):
    P=np.zeros(n+1)
    P[0]=P0
    for k in range(n):
        if a == 0: # modèle de Ricker
            P[k+1]=P[k]*np.exp(r*(1-P[k]/K))
        else:
            P[k+1] = (r+1)*P[k]/(1+P[k]*r/K)
    return P
```



- ⑤ Les modèles de Ricker et de Beverton-Hott décrivent deux types distincts de dynamique des populations.

La différence provient essentiellement du fait que l'équation logistique du modèle de Ricker :  $P_{n+1} = f(P_n)$  repose sur une fonction qui tend vers 0 pour de grandes valeurs de  $P_n$  tandis que le modèle de Beverton-Hott s'appuie sur une fonction  $g$  croissante qui admet une asymptote horizontale d'équation  $y = \frac{R_0}{R_0 - 1}K$ .

Dans le premier modèle (Ricker), si la population dépasse de beaucoup la capacité d'accueil de l'environnement, la population s'effondre dans son ensemble, modélisant l'effet d'une hausse importante de la mortalité et d'une baisse de la fertilité lorsque les ressources deviennent trop rares. On parle de modèle de concurrence.

Dans le second modèle, aussi grande soit la population par rapport à la capacité d'accueil du milieu, le nombre d'individus survivant à l'étape de temps suivant sera entre  $K$  et  $\frac{R_0}{R_0 - 1}K$  et la suite  $(P_n)$  aura une décroissance lente jusqu'à  $K$ . Il modélise un phénomène de rivalité au cours duquel certains individus s'accaparent les ressources disponibles au détriment de leurs congénères et empêchent ainsi la population de s'effondrer.

- *Fin du sujet* -

- ⑥ *En complément* : Les choses ne sont pas aussi simples et de nombreuses populations présentent des comportements qui combinent concurrence et rivalité. Il est alors nécessaire de les décrire par des graphes qui tiennent compte des deux aspects...

C'est le cas du modèle  $P_{n+1} = \frac{\lambda P_n}{(1 + aP_n)^\beta}$ .

- Si on prend  $\beta = 1$ , alors  $P_{n+1} = \frac{\lambda P_n}{1 + aP_n}$ .

On retrouve le modèle de Beverton-Hott en posant  $\lambda = R_0$  et  $a = \frac{1}{M} = \frac{R_0 - 1}{K}$

- Sinon, on note que ce modèle logistique peut s'exprimer sous la forme :

$$P_{n+1} = \lambda P_n e^{-\beta \ln(1+aP_n)} \underset{a \rightarrow 0}{\sim} \lambda P_n e^{-a\beta P_n}$$

Dès lors, si on note que le modèle de Ricker s'exprime lui aussi sous la forme :

$$P_{n+1} = P_n e^{r(1-P_n/K)} = P_n e^r e^{-rP_n/K}$$

il suffit de poser :  $\lambda = e^r$ ,  $a\beta = \frac{r}{K}$  avec  $a$  petit. Soit par exemple :  $a = \frac{1}{10 \cdot K}$  et  $\beta = 10 \cdot r$ .

Pour passer d'un modèle de Ricker à un modèle de Beverton-Hott, on pourra considérer les valeurs  $K = 10$  et  $r = 1.2$  et prendre pour commencer  $a = \frac{1}{10} = 0.01$ ,  $\beta = 12$  et  $\lambda = e^r = 3.32$  puis diminuer  $r$  jusqu'à prendre la valeur 0.1 pour faire passer  $\beta$  de 12 à 1.

On observera alors la courbe passer d'un modèle à l'autre.