Devoir surveillé 1 : Suites numériques et fonctions

Le sujet se compose de questions de cours, d'un exercice et d'un problème. Dans ce dernier, les parties ne sont pas de difficultés croissantes et on prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer. On pourra, à titre indicatif, consacrer 20 mn aux exercices et 1h10 au problème (✐ questions à traiter en 45 minutes : II.1 à II.4 et III.1 à III.4).
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ des résultats.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé au cours de l'épreuve.

Cours :

1. Donner la valeur des sommes suivantes : $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$; $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$; $S_3 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Donner la forme explicite de u_n dans le cas ou le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul et dans le cas où il est strictement négatif.
3. Donner les dévoloppements limités à l'ordre 3 des fonctions usuelles suivantes :
   $$\cos(x),\ \ln(1+x),\ (1+x)^{1/3} \text{ et } \arctan(x)$$

Exercice :

Montrer que les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},\ v_n = u_n + \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Problème : Nouveaux modèles discrets de dynamique des populations

Nous savons qu'il est possible de modéliser la dynamique d'une population grâce au moins à deux modèles distincts : le modèle malthusien et le modèle logistique. Dans ces modèles, on suppose que P_n désigne le nombre d'individus à l'instant $t = n$ tandis que la population initiale P_0 est connue. On désigne par r le taux intrinsèque d'accroissement naturel lié au taux de fécondité f et au taux de mortalité d selon la relation : $r = f - d$ et on note K la capacité d'accueil de l'environnement (en nombre d'individus).

Rappelons simplement que dans le modèle malthusien, l'accroissement relatif de population est indépendant de P et on a :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = r,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Des modèles plus convainquant doivent tenir compte, dans le cas des populations qui s'accroissent, de la capacité d'accueil de l'environnement et vérifier au minimum les hypothèses préalables suivantes :

$$\boxed{\text{La variation par individu } \frac{\Delta P}{P} \text{ est nulle pour } P = K \text{, positive si } P < K \text{ et négative si } P > K.}$$

Partie I : Présentation des modèles.

On considère les expressions suivantes pour lesquelles on supposera $r, K \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\Delta P}{P} = e^{r(1-P/K)} - 1 \text{ et } \frac{\Delta P}{P} = \frac{R_0}{1 + P/M} - 1 \text{ où } R_0 = r + 1 \text{ et } M = \frac{K}{R_0 - 1}$$

① Montrer que, dans chaque cas, $\Delta P/P$ vérifie les hypothèses encadrées ci-dessus.

② On regarde ce qui se passe pour de petits effectifs de population (P proche de 0). Montrer qu'on retrouve dans les deux cas le modèle malthusien, à condition, dans le premier modèle, que r soit petit. Expliquer pourquoi et dire comment se comporte la population lorsque les effectifs sont faibles.

✐ *Note :* Le premier modèle est appelé « modèle de Ricker », le second « modèle de Beverton-Hott ».

Partie II : Analyse mathématique.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

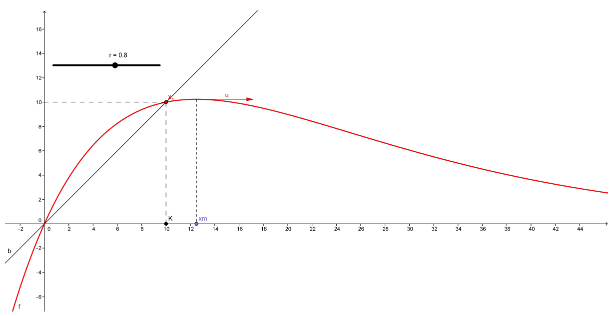
$$f(x) = xe^{r(1-\frac{x}{K})} \text{ et } g(x) = \frac{R_0 x}{1 + \frac{x}{M}}$$

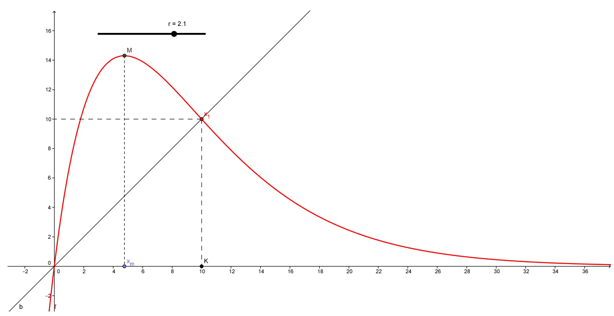
① Dans chacun des modèles de Ricker et Beverton-Hott, il est possible d'exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. Associer à chaque modèle la relation $P_{n+1} = f(P_n)$ et la relation $P_{n+1} = g(P_n)$ où f et g sont définies ci-dessus.

② Faire l'étude des fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+$. On précisera leur **continuité**, leur **dérivabilité**, leur **tableau de variation** ainsi que leur **comportement asymptotique**.

③ Rechercher les points fixes pour chacune des fonctions ($\alpha \in \mathbb{R}_+ / f(\alpha) = \alpha$ et $g(\alpha) = \alpha$).

④ Tracer l'allure de la courbe associée au modèle de Beverton-Hott en faisant apparaître la droite d'équation ($y = x$).
Nous donnons ci-dessous deux courbes associées au modèle de Ricker. Que pouvez-vous dire des valeurs de r dans chaque cas ?





définition 1 : On appelle **état stationnaire** toute solution constante du modèle. On parle aussi de valeur d'équilibre ou de point fixe du modèle.

définition 2 : On dit qu'un état stationnaire N^* d'un modèle logistique est **stable** lorsque toute suite (P_n) solution de ce modèle ayant pour condition initiale N_0 proche de N^* tend vers N^* lorsque n tend vers l'infini. Un état stationnaire qui n'est pas stable au sens de cette définition sera dit **instable**.

Théorème : Si un modèle $P_{n+1} = f_r(P_n)$ possède un état stationnaire P^*, alors $|f_r'(P^*)| > 1$ implique que P^* est instable tandis que $|f_r'(P^*)| < 1$ implique que P^* est stable. Si $|f_r'(P^*)| = 1$ alors cette information n'est pas suffisante pour conclure sur la stabilité de cet état.

⑤ Dire quels sont les états stationnaires pour les modèles de Ricker et de Beverton-Hott. Déterminer les conditions sur r pour que, dans chacun des deux modèles, les états d'équilibres soient stables ou instables.

Partie III : Interprétation des modèles.

① Si $0 < r < 1$ et $P_0 < K$ étudier les suites (P_n) dans chaque modèle et conclure sur la dynamique de la population modélisée.

② On suppose les paramètres suivants : $K = 10$, $r = 0.7$, $P_0 = 29$. Associer à chacune des évolutions représentées ci-dessous (jeux d'essais 1.1 et 1.2) le modèle de Ricker ou de Beverton-Hott. Le justifier.

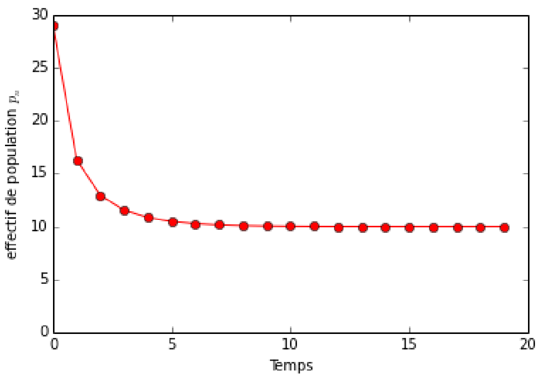


FIGURE 1 – Jeu d'essai 1.1

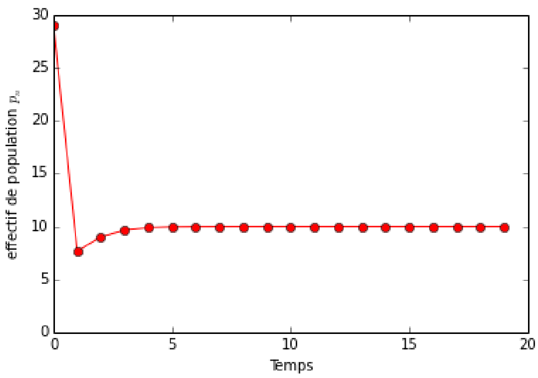


FIGURE 2 – Jeu d'essai 1.2

③ Même question avec les paramètres : $K = 10$, $r = 1.7$ et $P_0 = 14$ (jeux d'essai 2.1 et 2.2).

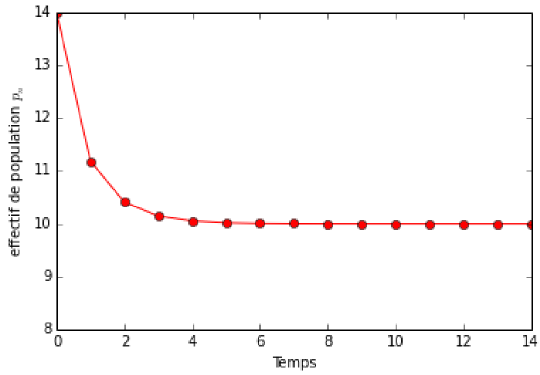


FIGURE 3 – Jeu d'essai 2.1

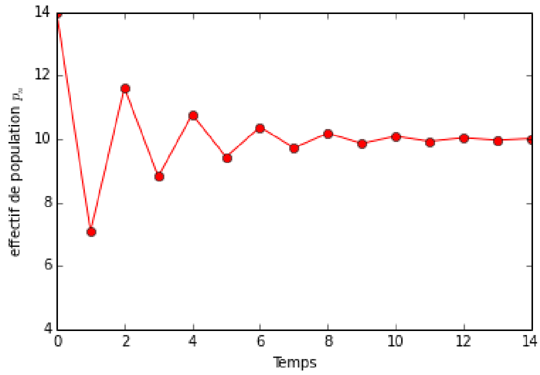


FIGURE 4 – Jeu d'essai 2.2

ainsi qu'avec les paramètres $K = 10$, $r = 2.3$ et $P_0 = 5$ (jeux d'essai 3.1 et 3.2).

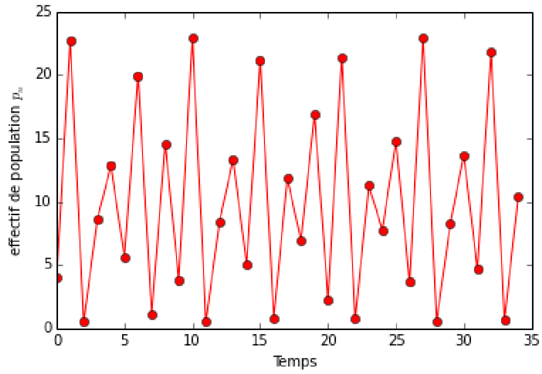


FIGURE 5 – Jeu d'essai 3.1

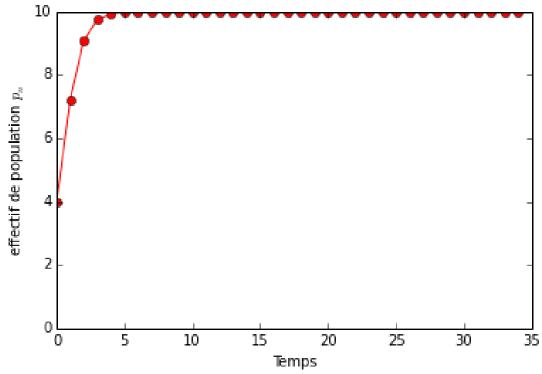


FIGURE 6 – Jeu d'essai 3.2

④ Écrire une fonction Python `DynamiquePop(K,r,P0,n,a)` dont les paramètres d'entrée sont K, r, P_0 (caractéristiques de la population), l'entier n égale au nombre de pas de temps modélisés, et l'entier a égale à 0 ou 1, et qui retourne la liste `LP` (de longueur $(n+1)$) des effectifs successifs de la population selon le modèle de Ricker si `a=0` et selon le modèle de Beverton-Hott si `a=1`.

⑤ Les modèles de Ricker et de Beverton-Hott décrivent deux types distincts de dynamique des populations. On peut en effet supposer deux type de comportement en cas de compétition. Lorsque l'effectif de la population augmente jusqu'à approcher la capacité d'accueil de l'environnement, les ressources deviennent plus rare. Dès lors, soit on considère que chaque individu est en concurrence, ce qui conduit à une baisse significative de la fertilité et à une augmentation de la mortalité, soit on considère que des luttes apparaissent qui laissent certains individus s'accaparer toutes les ressources disponibles au détriment de leurs congénères.
Au regard des études de f et de g, sauriez-vous associer chacune de ces hypothèses le modèle de Ricker et de Beverton-Hott ? Expliquer.