Devoir maison 2 : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 (= Ex. 7 - TD2) : Dérivées de fonctions réciproques

① Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $I = [-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$. On note A la réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle I.

② Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

④ Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

⑥ a) Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

Correction :

Partie I.

① La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

De plus $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, donc :

$$\boxed{\text{sinus est une bijection de } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ sur } [-1, 1].}$$

La réciproque de cette fonction sera notée A.

Remarque : d'habitude on l'appelle arcsinus, ou encore Arcsin.

② On sait que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $\boxed{A(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}.}$

On sait que $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $\boxed{A(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}.}$

Remarque : pour cette question et pour de nombreuses autres, le tracé d'un cercle trigonométrique au brouillon aide énormément.

③ On trace tout d'abord $\mathcal{C}_1$, la courbe de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, puis on sait que la courbe de A est le symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à la première bissectrice, c'est à dire par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

On fait apparaitre les points remarquables vus dans les questions 1 et 2.

...

④ Soit x dans $[-1,1]$. On sait que : $\cos^2\big(A(x)\big)+\sin^2\big(A(x)\big)=1$.
Et par définition $\sin\big(A(x)\big)=x$. Donc $\cos^2\big(A(x)\big)=1-x^2$.
Ainsi $\big|\cos\big(A(x)\big)\big|=\sqrt{1-x^2}$.
Enfin, $A(x)\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif. Donc :

$$\boxed{\forall x\in[-1,1],\ \cos\big(A(x)\big)=\sqrt{1-x^2}.}$$

⑤ La fonction f =sinus est dérivable sur $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ et $f'(x)=\cos(x)$, donc f' ne s'annule pas sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ (*bien noter les bornes exclues*). Ainsi

$$\boxed{A=f^{-1}\text{ est dérivable sur } f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)=]-1,1[.}$$

Toujours d'après le cours d'analyse de sup, $A'=\dfrac{1}{f'\circ A}$, donc :

$$\boxed{\forall t\in]-1,1[,\ A'(t)=\frac{1}{\cos\big(A(t)\big)}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.}$$

La dernière égalité est obtenue grâce à la question 4.
Remarque : lorsque t se rapproche des bornes -1 et 1, $A'(t)$ tend vers $+\infty$, ce qui est une nouvelle justification des demi-tangentes verticales sur la courbe de A qui avaient été obtenues par symétrie avec les tangentes horizontales de sinus. Mais bien sûr l'objet du sujet n'était pas ici de s'attarder sur ces détails.

⑥ a) D'après le cours sur les développements limités, on a au voisinage de 0 : $(1+t)^a=1+at+o(t)$.
En l'appliquant avec $a=-\frac{1}{2}$: $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}=1-\dfrac{t}{2}+o(t).}$

b) Et ainsi, lorsque $x\to 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.
On peut primitiver le développement limité : $A(x)=A(0)+x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$.
Or $A(0)=0$, car $\sin(0)=0$ et $0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\boxed{\text{Au voisinage de } 0 : A(x)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3).}$$

Remarque : ici encore ce développement limité s'accorde bien avec la courbe de A tracée précédemment : en 0, cette courbe de A a une tangente d'équation $y=x$ et la courbe de A est au-dessus de cette tangente à droite de 0, et en dessous à gauche de 0 (car $A(x)-x$ est du signe de x^3).

Exercice 2 (Ex. 10 - TD2) :

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}$ et la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$f(x_n) = x_{n+1},\ x_0 \in]0,1[$$

① Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution c sur l'intervalle $]0, 1/2[$.

② Étudier la monotonie de la suite (x_n).

③ Étudier la convergence de la suite (x_n) et écrire une fonction Python permettant le calcul de x_n pour toute valeur entière de n entrée par l'utilisateur.

④ Donner une valeur approchée à ε près de la limite de (x_n) en utilisant l'algorithme de dichotomie.

Correction :

① Montrons que $g : x \longmapsto f(x) - x = \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{9}$ s'annule une unique fois sur $]0, 1/2[$:
g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car fonction polynomiale. Elle est donc dérivable sur $I =]0, 1/2[$ avec :

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2}{3} < 0,\ \forall x \in I$$

Si on ajoute que $g(0) = \dfrac{1}{9}$ et $g(1/2) = -5/24$
alors g est continue, strictement monotone sur I, avec $g(0) \cdot g(1/2) < 0$, ce qui qui permet de conclure par le théorème de la bijection que $\exists! c \in]0, 1/2[/ g(x) = 0$.
Conclusion : $\boxed{\exists! c \in]0, 1/2[/ f(x) = x}$

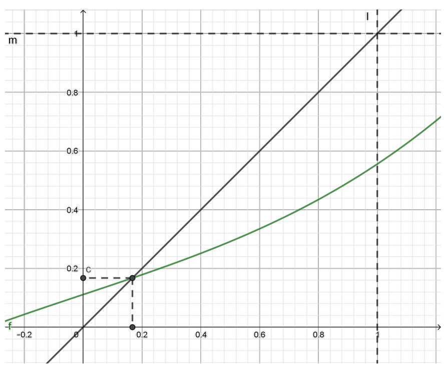
✐ *Remarque :* Comme g est décroissante sur $]0, 1/2[$ et s'annule en c, on vient de montrer que :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - x \geq 0 & \forall x \in [0, c] \\ f(x) - x \leq 0 & \forall x \in [c, 1/2] \end{cases}$$

② $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ car c'est une fonction polynomiale, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{x^2 + 1}{3} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$ avec $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [1/9, 5/9] \subset [0, 1]$, ce qui prouve que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.



Dès lors, au regard de la question précédente et de la représentation graphique ci-dessus, il est possible de mettre en évidence deux intervalles stables : $I_1 =]0, c[$ et $I_2 =]c, 1[$.
En effet, puisque $f(c) = c$, on a immédiatement $f(I_1) \subset I_1$ et $f(I_2) \subset I_2$.

D'où, puisqu'on rappelle que $x_0 \in]0, 1[$:

- Si $x_0 \in I_1$, alors une récurrence (à écrire dans la copie) permet de montrer que $x_n \in I_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Dès lors, d'après 1) : $g(x_n) > 0 \Leftrightarrow f(x_n) > x_n \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$.
  $\boxed{(x_n) \text{ est croissante et majorée par } c\text{. Elle converge}}$
- Si $x_0 \in I_2$, alors la même récurrence permet de montrer que $x_n \in I_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Dès lors, d'après 1) : $g(x_n) < 0 \Leftrightarrow f(x_n) < x_n \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$.
  $\boxed{(x_n) \text{ est décroissante et minorée par } c\text{. Elle converge}}$
- Évidemment, si $x_0 = c$, alors (x_n) est une suite constante égale à c.

Soit l la limite de la suite (x_n), alors elle vérifie la relation $f(l) = l$ avec $l \in [0, 1]$ puisque $x_n \in [0, 1]$ pour tout n entier naturel... f étant continue sur $[0, 1]$ et c étant l'unique point fixe de f sur cet intervalle, on peut conclure que $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = c}$.

Écrivons l'algorithme Python permettant de calculer le terme x_n :

```
f = lambda x:x**3/9+x/3+1/9

def suiteRec(n,x0):
    x = x0 # initialisation
    for k in range(n):
       y = f(x)
       x = y
    return x
```

③ Obtenons maintenant une valeur approchée à ε près de c en utilisant l'algorithme de dichotomie appliqué à la fonction $g = f - id$:

```
g = lambda x:f(x)-x

def dichotomie(eps,x0):
    a,b = 0,1/2
    while b-a > eps:
       c = (a+b)/2
       if g(a)*g(c) <= 0:
          b = c
       else:
          a = c
    return c
```

L'algorithme nous retourne à $1e-5$ près la valeur approchée : $\boxed{c = 0.16744}$