Devoir maison 1 : Suites numériques

Exercice 1 : Suite de racines

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0,+\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

② **Modélisation :** A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.
Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python, Geogebra ou Excel. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

– $a_0 = a$ et $b_0 = b$
– Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

③ **Étude mathématique :**

a) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
En déduire la monotonie de la suite (α_n).

b) Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l.
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n).

Exercice 2 : ✶✶

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

① a) Déterminer, pour tout réel n, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
b) En déduire les variations de la fonction f_n.

② a) Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.
b) Déterminer les équations des droites asymptotes (D_n), (D_n') en $+\infty$ et en $-\infty$ de $(\mathcal{C}_n)$.
c) Déterminer les coordonnées du seul point noté A_n où f_n'' s'annule en changeant de signe. Ce point est appelé point d'inflexion de $(\mathcal{C}_n)$.
d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

③ a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée u_n.
b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).
d) Montrer ensuite que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Correction - Exercice 1 :

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

① *Montrons que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution* α_n sur $[0,+\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

- Si $n = 0$ alors $f_n : x \longmapsto x - 1$ et l'équation $f_0(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha_0 = 2$.
- Si $n \geq 1$, on étudie la fonction f_n : C'est une fonction polynôme, ce qui assure que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$f_n'(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x - n)$$

Dès lors

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_1 = \frac{n}{n+1} > 0.$$

Il en découle que la fonction f_n est décroissante sur $[0, x_1]$ avec

$$f_n(0) = 0 \text{ et } f_n(x_1) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} - \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n(n-(n+1))}{(n+1)^{n+1}} = -\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < 0$$

Donc f_n ne s'annule pas sur $]0, x_1]$.

Par ailleurs la fonction est strictement croissante sur $[x_1,+\infty[$ avec $x_1 = \dfrac{n}{n+1} < 1$.

Il suffit alors de noter que f_n est continue sur $[1,2] \subset [x_1,+\infty[$, $f_n(1) = 0$ et $f_n(2) = 2^n > 1$ pour conclure par application du théorème des valeurs intermédiaires que :

$$\boxed{\exists! \alpha_n \in [1,2] / f_n(\alpha_n) = 1}$$

② **Modélisation :** On lira page suivante une rédaction possible utilisant l'algorithme de dichotomie appliqué à la fonction g_n définie par $g_n(x) = f_n(x) - 1$ puisque $f_n(\alpha_n) = 1 \Leftrightarrow g_n(\alpha_n) = 0$. Il suffit alors de faire varier la valeur de N pour pouvoir conjecturer que la suite (α_n) converge vers 1 par valeurs supérieures.

③ **Étude mathématique :**

a) *Déterminons le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x :*

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+2} - x^{n+1} - x^{n+1} + x^n = x^{n+2} - 2xp^{n+1} + x^n \\ &= x^n(x^2 - 2x + 1) = x^n(x-1)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

En déduire la monotonie de la suite (α_n) :
Si on considère le cas particulier $x = \alpha_n \in [1,2]$ pour tout n entier naturel, on obtient :

$$f_n(\alpha_{n+1}) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1 = f_n(\alpha_n)$$

Or la fonction f_n est croissante sur $[1,2]$. Il découle donc de la relation précédente que : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (\alpha_n) \text{ est décroissante}}$.

b) *Prouvons que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l :*
La suite (α_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

Conclusion : $\boxed{\exists L \in [1,2] / \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = L}$

En raisonnant par l'absurde, validons la conjecture faite en 2. pour la limite L de la suite (α_n) :

On suppose pour valider notre conjecture que $L > 1$.
Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(\alpha_n)} = +\infty \text{ car } \ln(L) > 0$$

Dès lors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n(\alpha - 1)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_n) = +\infty$$

Ce qui est absurde puisque, par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\boxed{(\alpha_n) \text{ converge vers } L = 1}$

Fonctions Python permettant d'estimer la monotonie de la suite (u_n) :

```
eps = 1e-3

def g(n,x): # g(n,x) = f_n(x) - 1
    return x**(n+1)-x**n-1

def dichotomie(n,eps):
    # détermination de α_n à eps près avec a,b = 1,2
    a,b = 1,2
    while b-a > eps:
       c = (a+b)/2
       if g(n,a)*g(n,c) <= 0:
          b = c
       else:
          a = c
    return c # v.a. de alpha_n

def suiteAlpha(N):
    alpha = [2] # initialisation avec alpha_0 = 2
    for n in range(1,N+1): # termes de alpha_1 à alpha_N
       va = dichotomie(n,eps)
       alpha.append(va)
    return alpha

def graphe(N):
    A = suiteAlpha(N)
    abs = np.arange(N+1)
    plt.plot(abs,A,'ro')
    plt.show()
    return A
```

Correction - Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

① a) *Déterminons, pour tout réel n, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$:*
La fonction $x \longmapsto 1+e^x$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, f_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
Un calcul immédiat donne : $\boxed{f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n \text{ et } f_n''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3},\ \forall x \in \mathbb{R}}$

b) *Déduisons-en les variations de la fonction f_n :*
f_n'' s'annule en $x=0$. Elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et négative sur $\mathbb{R}_-^*$.
Dès lors, f_n' est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet son minimum en 0 qui vaut $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4} > 0$.
On en déduit que $f_n'(x) > 0$ pour tout x réel.
Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

② a) *Déterminons les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition :* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$, donc immédiatement $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty}$

b) *Déterminons les équations des droites asymptotes (D_n), (D_n') en $+\infty$ et en $-\infty$ de $(\mathcal{C}_n)$:*

– <u>En $+\infty$:</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x(1+e^x)} + n = n$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - nx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$. ***Conclusion*** : $\boxed{(D_n) \text{ a pour équation : } y = nx}$

– <u>En $-\infty$:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x(1+e^x)} + n = n$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (f_n(x) - nx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$. ***Conclusion*** : $\boxed{(D_n') \text{ a pour équation : } y = nx+1}$

c) *Déterminons les coordonnées du seul point noté A_n où f_n'' s'annule en changeant de signe :*

$$f_n''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

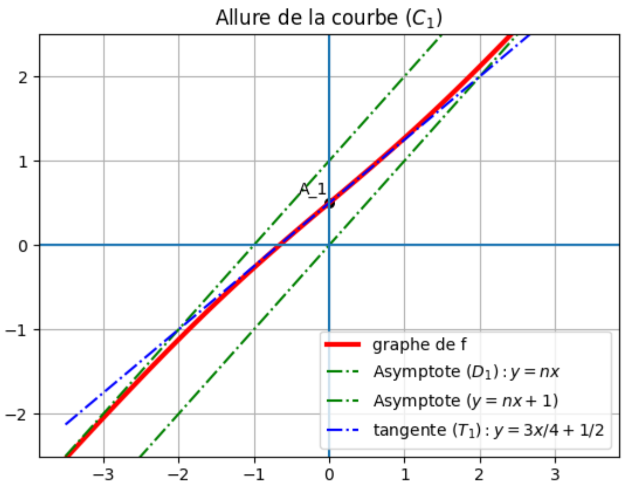
Conclusion : $\boxed{f_n'' \text{ s'annule en changeant de signe en } A_n = (0, f_n(0)) = (0, 1/2)}$

d) *Donnons l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 :*

Par définition (T_1) a pour équation :

$$y = f_1(0) + f_1'(0)x = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{4} + 1) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

puis traçons les droites (D_1), (D'_1) et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_1)$:



③ a) *Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée u_n :*
La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \longmapsto 1 + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, et donc $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après la question 1.b) elle est strictement croissante.
Donc f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après les limites obtenues en 2.a).
Dès lors, le théorème de la bijection assure que : $\boxed{f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}}$.

b) *Montrons que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$*

Par définition $f_n(u_n) = 0$. Or $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\dfrac{e^{-\frac{1}{n}}}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 0$.

Or f_n est bijective, strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{n}, 0\right]$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0}$.

c) *En déduire la limite de la suite (u_n) :* Par application du théorème d'encadrement des limites, il est immédiat que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$

d) *Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$:*

On sait que $f_n(u_n) = 0$, donc $-\dfrac{1}{1+e^{u_n}} = nu_n$.

Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} e^{u_n} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = -\dfrac{1}{2}$.
Ou encore, en multipliant de chaque côté par (-2) :

$$\lim_{n\to\infty} -2nu_n = 1$$

Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}}$.