15 T.D. Couples de variables aléatoires réelles discrètes.

– Loi conjointe d'un couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes positives.
– Lois marginales, lois conditionnelles. Indépendance
– Théorème de transfert. Espérance de $u(X, Y)$ pour une fonction u positive.
– Lois de $u(X, Y)$. Plus particulièrement loi de $max(X, Y)$, $min(X, Y)$ et $X + Y$.

Exercice 1 : ✶

On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $E = [\![1, n+1]\!]$. La loi du couple est donnée par :

$$\forall (i,j) \in E^2, \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \lambda \cdot \binom{n}{i-1} \cdot \binom{n}{j-1}$$

① Déterminer λ.

② Déterminer la loi marginale de X. Calculer son espérance et sa variance ;

③ On considère la matrice M définie par $\forall (i,j) \in E^2$, $M_{i,j} = \mathbb{P}_{(Y=j)}(X = i)$.
M est-elle inversible ? Calculer M^2.

Exercice 2 : ✶

On considère la suite réelle $(p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie par : $p_{i,j} = \lambda \dfrac{a^{i+j}}{i!j!}$.

① Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que cette suite définisse une loi conjointe de probabilité.

② Soit (X, Y) couple de variable aléatoire discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi conjointe définie par les $p_{i,j}$.

a. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
b. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
c. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 3 : ✶

Soit X, variable aléatoire égale au résultat d'un tirage au hasard d'un entier sur $[\![1, n]\!]$. On effectue alors un tirage au hasard dans l'intervalle $[\![1, X]\!]$ dont le résultat se note Y. Déterminer les espérances de X et de Y.

Exercice 4 : ✶

On tire successivement deux jetons, avec remise, dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note X la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et M la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.

① Déterminer la loi conjointe du couple (X, M).

② Écrire une fonction Python permettant de simuler m répétitions de cette expérience et de représenter les couples (X, M) obtenus par des disques de rayons proportionnels à la fréquence de leur apparition.

③ Déterminer la loi marginale de M ainsi que son espérance. Écrire une fonction Python permettant d'approcher $\mathbb{E}(M)$ pour différentes valeurs de n.
Comparez graphiqement l'espérance théorique et l'espérance expérimentale des valeurs de n prises dans $[\![1, 20]\!]$.

④ Calculer $\mathrm{Cov}(X, M)$ et confrontez votre réponse .

Exercice 5 : ✶

On rappelle l'énoncé de l'exercice 8 du td14. Un poissonnier romain venait concurrencer Ordralfabétix. On appelait X le nombre de personnes allant chez Ordralfabétix et G le nombre de bourre-pif distribués. Les variables aléatoires X et G sont-elle indépendantes ? Si non, déterminer le coefficient de corrélation entre G et X.

Exercice 6 : ✶✶

Soient $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre λ. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

① Déterminer par récurrence une densité ainsi que la fonction de répartition de S_n.

② Montrer que $\mathbb{P}(S_n \leq 1 < S_{n+1}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$

③ En déduire une fonction Python permettant de simuler les réalisations d'une variable aléatoire qui suit une loi de poisson de paramètre λ. Proposez des méthodes statistiques permettant de valider la qualité de votre simulation.

Exercice 7 : ✶✶✶ D'après Oral Agro 2013

On effectue simultanément une succession de tirages avec remise dans deux urnes contenant chacune une proportion p de boules blanches.
Soit X et Y le nombre de tirages ayant amené une autre couleur que la couleur blanche respectivement sur la première et la seconde urne.

① **a.** Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X + Y \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X - Y \leq 0)$.
b. Les événements $(X + Y \leq 0)$ et $(X - Y \leq 0)$ sont-ils indépendants ?
c. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(Y < X)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.

② Expliciter la loi de la variable aléatoire $D = X - Y$ et déterminer, si elles existent, son espérance et sa variance.

③ On pose $T = max(X, Y)$ et $U = min(X, Y)$.
a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X \geq k)$ et en déduire que U soit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
b. En déduire l'espérance et la variance de U ainsi que l'espérance de T.
c. Montrer que $(T = k) \cup (U = k) = (X = k) \cup (Y = k)$. En déduire que $\mathbb{P}(T = k) = 2\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(U = k)$.
d. On se place dans le cas où $p = 1/2 = q$. Démontrer l'existence et donner la valeur de $\mathbb{V}(T)$.