

- Programme de colle - Semaines 21 et 22 -

Chapitre 9 : Réduction d'endomorphismes

1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.
3. Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
4. Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
5. En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable. En dimension n , f ou M sont diagonalisable ssi la somme des dimensions des SEV propres est égale à n .
Condition suffisante de diagonalisabilité si le cardinal du spectre vaut n .

Chapitre 10 : Produit scalaire

1. Bilinéarité du produit scalaire dans \mathbb{R}^n , norme euclidienne.
2. vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore et bases orthonormales.
3. Matrices carrées symétriques réelles diagonalisables dans une base orthonormale de vecteurs propres.
4. Projections orthogonales sur F . Ecriture dans une base orthonormale de F . Relation $p \circ p = p$.
5. Distance d'un vecteur à un sous-espace de \mathbb{R}^n

Les questions de cours sont les suivantes :

- **Q1** : Inégalité de Cauchy-Schwarz (☞ La discussion des cas d'égalité n'est pas un objectif du programme).
- **Q2** : Si F ssev de \mathbb{R}^n alors F^\perp est ssev de \mathbb{R}^n tel que $F^\perp \cap F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Par ailleurs, si $B_F = (u_1, \dots, u_q)$ est une base de F , alors $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, (x|u_i) = 0$.
- **Q3** : Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n et $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n .
Si P désigne la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , alors : ${}^t P P = I_n$.
- **Q4** : Le Spectre des matrices symétriques réelles est inclus dans \mathbb{R} .
- **Q5** : Si $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_q)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n et si p est la projection orthogonale de \mathbb{R}^n sur F , alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) = \sum_{i=1}^q (u_i|x) u_i$
- **Q6** : Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n dont $B_F = (u_1, \dots, u_q)$ est une base et soit p la projection orthogonale sur F de \mathbb{R}^n . Alors : $p \circ p = p$, $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = F^\perp$
- **Q7** : Expression matricielle de la projection orthogonale p sur F , droite vectorielle engendrée par un vecteur a supposé normé.

Exercices :

Tout exercice portant sur les **chapitre 9** et **chapitre 10**.

Bonne dernière semaine de colles!