- Programme de colle - Semaines 21 et 22 -

Chapitres 9 : Réduction d'endomorphismes

1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.
3. Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
4. Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
5. En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable. En dimension n, f ou M sont diagonalisable ssi la somme des dimensions des SEV propres est égale à n.
   Condition suffisante de diagonalisabilité si le cardinal du spectre vaut n.

Les questions possibles sont les suivantes :

- **Q1 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, bijectif. Alors :
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$
- **Q2 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Rightarrow \lambda^n \in \mathrm{Sp}(f^n)$ et $E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$.
- **Q3 :** Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- **Q4 :** Si deux matrices sont semblables alors elles ont même valeurs propres. La réciproque est fausse.
- **Q5 :** A et ${}^tA$ ont même valeurs propres.
- **Q6 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont réels. Alors :
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A)$$
- **Q7 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E) / \dim(E) = n$.
$$f \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \text{il existe une base } \mathcal{B}' \text{ formée de vecteurs propres de } f \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda) = n$$

Exercices :

Tout exercice portant sur le **chapitre 9**.

Bonne dernière quinzaine de colles !