



Les objectifs : « Diagonaliser une matrice ; calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans moyens de calculs) ».

☞ Dans l'ensemble du chapitre, \mathbb{K} désignera aussi bien \mathbb{R} que \mathbb{C} .

1 Éléments propres

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition

Définition 1.1 : valeurs propres - vecteurs propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- ① On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f si, et seulement si :

$$\exists u \in E, u \neq 0 / f(u) = \lambda u$$

On dira que u est un **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ .

- ② On dit que u est un **vecteur propre** de f si, et seulement si :

$$u \in E, u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / f(u) = \lambda u$$

Notation : L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le **spectre** de f et se note $\text{Sp}(f)$.

Propriété

prop.1.1. Sous-espace vectoriel propre

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de valeur propre λ .

L'ensemble formé des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul 0_E est un sous-espace vectoriel de E .

On l'appelle le **sous-espace vectoriel propre** associé à λ et on le note E_λ .

$$E_\lambda = \{u \in E / f(u) = \lambda u\}$$

Remarque 1 : $\dim E_\lambda = \dim E - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E)$.

Remarque 2 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, alors : $\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow E_\lambda \subset \text{Im} f$.

Propriété

prop.1.2. Caractérisation des valeurs propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E$ finie.

$$\begin{aligned} (1) \lambda \in \text{Sp}(f) &\Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0_E\} & (2) \\ &\Leftrightarrow \dim E_\lambda \geq 1 & (3) \\ &\Leftrightarrow f - \lambda \text{id}_E \text{ non injective} & (4) \\ &\Leftrightarrow f - \lambda \text{id}_E \text{ non bijective} & (5) \end{aligned}$$



Cas particulier : $0 \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ non injective $\Leftrightarrow f$ non bijective. Dans ce cas $E_0 = \text{Ker } f$
 En conséquence, f injectif si, et seulement si $0 \notin \text{Sp}(f)$

Exemple

Exemple 1.1

Déterminer le spectre et les sous-espaces vectoriels propres de l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y, x + y)$$

Exemple

Exemple 1.2

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de E , espace vectoriel de dimension n , tel que sa matrice dans une base de E ne comporte que des 1.

Propriété

prop.1.3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, bijectif. Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$

Propriété

prop.1.4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \lambda^n \in \text{Sp}(f^n) \text{ et } E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$$

1.2 Valeurs propres, vecteurs propres, ss-espaces propres d'une matrice carrée

Définition

Définition 1.2 : valeurs propres - vecteurs propres d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

① On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A si, et seulement si :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 / AX = \lambda X$$

On dira que X est un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ .

② On dit que X est un **vecteur propre** de A si, et seulement si :

$$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / AX = \lambda X$$

Notation : L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le **spectre** de A et se note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Propriété*prop.1.5. Sous-espace vectoriel propre*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeur propre λ .

L'ensemble formé des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul 0_E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On l'appelle le **sous-espace vectoriel propre** associé à λ et on le note $E_\lambda(A)$.

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\}$$

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Il est possible d'interpréter A comme matrice d'un endomorphisme E de \mathbb{K}^n . Dès lors, il y a coïncidence entre les éléments propres de A et ceux de l'endomorphisme qu'elle représente.

Propriété*prop.1.6. Caractérisation des valeurs propres*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

- | | | | |
|-------------------------|-------------------|-------------------------------------------------------|-----|
| (1) $\lambda \in Sp(f)$ | \Leftrightarrow | le système $(A - \lambda I)X = 0$ n'est pas de Cramer | (2) |
| | \Leftrightarrow | $A - \lambda I$ est non inversible | (3) |
| | \Leftrightarrow | $rg(A - \lambda I) < n$ | (4) |

Propriété*prop.1.6.*

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Exemple*Exemple 1.3*

Déterminer les éléments propres des deux endomorphismes suivants :

- ① $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / f(x, y, z) = (x + 5y + 6z, 2y + 4z, 2z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- ② $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]) / g(P) = P + XP', \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

Propriété*prop.1.7.*

Si A et B sont semblables, alors elles ont mêmes valeurs propres.

Attention : La réciproque est fausse.

Propriété*prop.1.8.*

A et tA ont même valeurs propres

2 Diagonalisation

2.1 Famille finie de vecteur propres.

Propriété

prop.2.1.

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Exemple

Exemple 2.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\{f_k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est une famille libre de $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ avec $f_k : x \mapsto e^{kx}$

Propriété

prop.2.2.

Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Conséquence : Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n .



On prendra garde à l'ensemble \mathbb{K} des scalaires : Selon qu'on travaille sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} , les spectres peuvent être distincts. On retiendra que si le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$.

Propriété

prop.2.3.

On suppose ici que le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont réels. Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \text{Sp}(A) \text{ et } X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow \bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A)$$

2.2 Endomorphisme diagonalisable - matrice diagonalisable

✍ Dans la suite, on supposera que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n .

Définition

Définition 2.1 : Endomorphisme diagonalisable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dite **diagonalisable** si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Propriété

prop.2.4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est **diagonalisable** si, et seulement si, il existe une base \mathcal{B}' formée de vecteurs propres de f .

Définition

Définition 2.2 : Matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **diagonalisable** si, et seulement si, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice diagonale $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Remarque : Cette définition est cohérente avec la définition 2.1 si on interprète A comme la matrice d'un endomorphisme f de E .

Exemple

Exemple 2.2

Dire dans chacun des cas suivants si la matrice A est diagonalisable :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



On retiendra que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Sp}(A) = \{\lambda\}$, alors :

A est diagonalisable sur \mathbb{K} si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.

Propriété

prop.2.5. Une condition **nécessaire et suffisante** de diagonalisation

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n .

Propriété

prop.2.5. Une condition **suffisante** de diagonalisation

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Méthode

Calcul de puissances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Alors A est semblable à une matrice D diagonale et il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}$$