CHAP. 8 Couples de variables aléatoires discrètes

Les objectifs : « Ce chapitre permet, par le maniement de sommes de séries, d'avoir une approche assez complète des phénomènes liés aux couples de variables aléatoires : lois conjointes, lois marginales, indépendance. »
Le programme se limite aux situations faisant intervenir des couples de variables aléatoires à valeurs positives et des séries doubles à termes positifs.

1 Séries doubles à termes positifs

Notion de suite double : Soit u une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $u_{i,j}$ l'image du couple (i, j) par u. Alors $(u_{i,j})$ est dite suite double indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Propriété

Proposition 1.1. Sommes doubles dans le cas fini

Soit $p, n \in \mathbb{N}^2$, $p < n$. Si $u_{i,j}$ est nul en dehors de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, alors :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{n} u_{i,j} \; ; \; S_2 = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{i} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=j}^{p} u_{i,j}$$

Propriété

Proposition 1.1. Sommes doubles dans le cas infini

*Pour toute suite double $(u_{i,j})$ de réels **positifs ou nuls**, on a :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}$$

***dès que** l'une des deux expressions est constituée de séries convergentes.*

Cette proposition prend une autre forme :

Propriété

Proposition 1.1. Sommes doubles dans le cas infini

*Pour toute suite double $(u_{i,j})$ de réels **positifs ou nuls**,*

① *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j \geq 0} u_{i,j}$ converge de somme S_i et la série $\sum\limits_{i \geq 0} S_i$ converge.*

② *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i \geq 0} u_{i,j}$ converge de somme T_j et la série $\sum\limits_{j \geq 0} T_j$ converge.*

Lorsque l'un au moins des points précédents est vérifié, alors la somme double existe et vaut :

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}$$

2 Couples de variables aléatoires discrètes

2.1 Loi conjointe

Définition

Définition 2.1

Soit Ω *un univers. On appelle* `couple de variables aléatoires discrètes positives` *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}_+^2$ *définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ (X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

où X *et* Y *sont deux variables aléatoires discrètes positives.*

Définition

Définition 2.2

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$*. Définir la* `loi conjointe` *ou* `loi du couple` (X, Y)*, c'est donner :*

① $(X, Y)(\Omega)$

② $\forall (x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$ *aussi noté* $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

Propriété

Proposition 2.1

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires discrètes sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *tel que* $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ *et* $Y(\Omega) = \{y_j, j \in \mathbb{N}\}$*. Si on pose* $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$*, alors :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$$

Exemple

Exemple 1.1

On lance une pièce non équilibrée telle que $\mathbb{P}(P) = \dfrac{2}{3}$ *et* $\mathbb{P}(F) = \dfrac{1}{3}$*. Donner la loi du couple* (X, Y) *où* X *et* Y *sont les variables aléatoires discrètes respectivement égales au rang du premier et du deuxième pile.*

Propriété

Proposition 2.2 Caractérisation des lois de couples de variables discrètes.

Soit $(p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ *une suite réelle telle que :*

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ p_{i,j} \geq 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$$

Alors la suite double $(p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ *définit une loi de probabilité d'un couple* (X, Y)*.*

2.2 Loi marginale

Définition — *Définition 2.3*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. La loi de X est appelée la `première loi marginale` *du couple (X, Y) et Y est appelée* `la seconde loi marginale`.

Propriété — *Proposition 2.3.*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On obtient les lois marginales à partir de la conjointe de la façon suivante :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$
$$\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Exemple — *Exemple 2.1*

Déterminer les lois marginales du couple dont la loi conjointe a été donnée dans l'exemple 2.1.

Exemple — *Exemple 2.2*

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire discrètes dont la loi conjointe est donnée par :

$$p_{i,j} = \frac{a}{i!2^j},\ \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$$

Déterminer a puis les lois marginales.

2.3 Loi conditionnelle

Définition — *Définition 2.4*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

① *Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, la* `loi conditionnelle sachant` $(Y = y)$ `de` X *est donnée par :*

$$X(\Omega) \text{ et } \forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

② *Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la* `loi conditionnelle` *sachant $(X = x)$ de Y est donnée par :*

$$Y(\Omega) \text{ et } \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}$$

Exemple — *Exemple 2.3*

Reprendre la loi conjointe de l'exemple 2.1. et déterminer la loi conditionnelle sachant $(Y = k)$ de X pour $k \geq 2$.

3 Théorème de transfert - applications

Propriété

Proposition 3.1 Théorème de transfert

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et soit u une fonction ***positive*** *définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors, sous réserve de convergence,*

$$\mathbb{E}(u(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} u(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

Exemple

Exemple 3.1

Soit $Z = XY$ où (X,Y) est le couple de variables aléatoires défini dans l'exemple 2.2.
Montrer que $\mathbb{E}(Z)$ existe et calculer sa valeur.

Propriété

Proposition 3.2 Espérance d'une somme

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes ***positives*** *sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent.*
Alors $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
Plus généralement, si $X_1, \cdot, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes positives qui admettent une espérance, alors $S_n = X_1 + \cdot + X_n$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$

Définition

Définition 3.1 Covariance

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes ***positives*** *sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ existent. Alors on appelle* `covariance` *de X et de Y le réel :*

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

⚠ Le théorème de transfert assure que, sous ces hypothèses :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y))\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

Pour autant, on préférera utiliser la linéarité de l'espérance et écrire que :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)} \text{ où } \mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

Exemple

Exemple 3.3

Calculer $Cov(X,Y)$ où le couple (X,Y) est défini dans l'exemple 2.2

Propriété

Proposition 3.3 Propriétés de la covariance

Si X et Y admettent des variances, alors :

① $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ *[Symétrie]*

② $Cov(aX_1 + bX_2, Y) = a\,Cov(X_1,Y) + b\,Cov(X_2,Y)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$
$Cov(X, cY_1 + dY_2) = c\,Cov(X,Y_1) + d\,Cov(X,Y_2)$, $\forall c,d \in \mathbb{R}$ *[Bilinéarité]*

③ $Cov(X,X) = \mathbb{V}(X)$

④ $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,Cov(X,Y)$
$\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\,Cov(X,Y)$

4 Indépendance

Définition

Définition 4.1 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. X et Y sont `indépendantes` *si, et seulement si, pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$*

⚠ On reliera avec attention les définitions et propriétés de l'indépendance données dans le cadre général du chapitre 2 : « Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires ».

Propriété

Proposition 4.1 Propriétés de l'indépendance

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ *puisque* $Cov(X,Y) = 0$.

⚠ Attention : Si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, cela n'assure pas que X et Y sont indépendantes.

5 Loi de $u(X,Y)$:

5.1 loi du minimum et du maximum de deux ou n var indépendantes

Méthode

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires ***indépendantes*** *de fonctions de répartition respectives F_{X_1} et F_{X_2}.*

① *Soit $Y = max(X_1, X_2)$. On détermine $Y(\Omega)$ et sa fonction de répartition F_Y en écrivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \mathbb{P}\left(max(X_1, X_2) \leq x\right) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x)$$

Dès lors, $\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = k) = F_Y(k) - F_Y(k-1) \text{ où } F_Y(k) = F_{X_1}(k) \cdot F_{X_2}(k)}$

② *Soit $Z = min(X_1, X_2)$. On détermine $Z(\Omega)$ et on précise que :*

$$\boxed{\forall k \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1)}$$

Exemple

Exemple 5.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p')$. Déterminer la loi de $Z = min(X,Y)$

5.2 loi d'une fonction u de deux var discrètes.

Propriété

Proposition 4.2

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et soit u une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ telle que $Z = u(X,Y)$ est une variable aléatoire discrète.
Alors la loi de Z s'exprime à l'aide de la loi conjointe du couple (X,Y) avec :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = u(x,y)}} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Propriété

Proposition 4.2 Somme de deux var discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors $S = X + Y$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dont la loi est donnée par : $S(\Omega) = (X+Y)(\Omega)$ et $\forall z \in S(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = z) &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = x + y}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega) / x \leq z} \mathbb{P}(X = x, Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega) / y \leq z} \mathbb{P}(X = z - y, Y = y) \end{aligned}$$

Exemple

Exemple 5.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de $S = X + Y$, son espérance et sa variance.

Exemple

Exemple 5.3

Reprendre cette fois encore le couple (X, Y) défini dans l'exemple 2.1 et déterminer la loi $Z = Y - X$

Propriété

Proposition 4.3 Loi de la somme de deux var indépendantes suivant des lois de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors $S = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Plus généralement :
Si $X_1, \cdot, X_n$ sont des variables mutuellement indépendantes telles que X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_k pour tout $k \in [\![1, k]\!]$. Alors : $S_n = X_1 + \cdot + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$