CHAP. 7 Variables aléatoires réelles discrètes

Les objectifs : « L'ensemble de ce chapitre donne l'occasion de revoir, par le biais d'exercices, les lois de probabilités finies, présentées dans le programme de première année. »

1 Variables aléatoires réelles discrètes

1.1 Loi de probabilité et fonction de répartition

On rappelle la définition générale de variable aléatoire réelle :

Définition

Définition 1.1. Variables aléatoires réelles

On appelle `variable aléatoire réelle` *sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *toute application* X *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$, *noté* $(X \leq a)$, *soit un évènement.*
L'univers image noté $X(\Omega)$ *est l'ensemble des valeurs prises par* X.

Définition

Définition 1.2. Variables aléatoires réelles

Une variable aléatoire réelle est dite `discrète` *si l'ensemble* $X(\Omega)$ *de ses valeurs est indexé par une partie de* $\mathbb{N}$

Exemples

Exemples 1.1.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace probabilisable,* $c \in \mathbb{R}$.

① *Application constante égale à* c *dite aussi variable aléatoire discrète certaine.*

② *Une urne est composée de* N *boules dont une proportion* p *de boules blanches.*

- **a.** *On effectue un tirage dans l'urne. On considère la variable aléatoire qui à l'événement : « obtenir une boule blanche » associe* 1 *et à l'événement contraire associe* 0.
- **b.** *On effectue* n *tirages avec remise dans l'urne et on considère la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.*
- **c.** *On effectue un tirage par poignée de* n *boules de l'urne et on considère la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.*
- **d.** *On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir la première boule blanche et on considère la variable aléatoire égale au nombre de tirage pour faire apparaître la première boule blanche.*

Définition

Définition 1.3 Loi de probabilité.

Définir la `loi de probabilité` *d'une variable aléatoire discrète sur* Ω, *c'est donner :*
– $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ - *valeurs ordonnées le plus souvent sous la forme d'une suite strictement croissante.*
– $\forall x \in X(\Omega)$, $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$

Propriété

Proposition 1.1. Système complet associé à une v.a.r.d.

Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Les événements $(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ forment un système complet d'événements.

Conséquence : Dans le cas d'une variable aléatoire discrète infinie, on a : $\sum_{k\geq 1} p_k$ converge et $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Exemple

Exemple 1.2

Déterminer la loi des chacune des variables aléatoires définies dans l'exemple 1.1.

Remarque 1.1. : Dans le cas des variables aléatoires discrètes infinies, l'équiprobabilité est impossible.

Propriété

Proposition 1.2. Caractérisation des lois de probabilités discrètes.

On distingue deux cas :

① ***Le cas fini*** *: Soit $(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet de réels* ***positifs*** *tels que : $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.*

Alors les $(p_k)_{0\leq k\leq n}$ sont les coefficients d'une loi de probabilité.
Pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\} \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = x_k) = p_k$$

② ***Le cas infini*** *: Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$, $\sum_{n\geq 1} p_n$ converge de somme égale à 1.*

Alors la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de coefficients d'une loi de probabilité.
Pour toute $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle, il existe $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace tels que :

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = x_n) = p_n$$

Exemple

Exemple 1.3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. A quelle condition sur α les réels $p_n = \alpha\dfrac{\lambda^n}{n!}$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont-ils les coefficients d'une loi de probabilité ?

Exemple

Exemple 1.4

Même question avec $p_n = \dfrac{\alpha}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Définition

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle `fonction de répartition` *la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Propriété

Proposition 1.3

Soit X variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et soit F_X sa fonction de répartition. Alors :

① F_X *est croissante sur* $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

② F_X *est constante sur les intervalles* $[x_k, x_{k+1}[$ *et*

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1),\ \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}),\ \forall k \geq 2.$$

✐ *Utile pour déterminer la loi de X à partir de sa fonction de répartition.*

Exemples

Exemple 1.5.

Savoir tracer les fonctions de répartition des variables aléatoires usuelles

Exemple

Exemple 1.6.

Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On effectue n tirages avec remise et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $X(\Omega)$, la fonction de répartition F_X de X. En déduire sa loi.

Exemple

Exemple 1.7.

Soit X variable aléatoire discrète de loi définie par : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Exprimer sa fonction de répartition.

1.2 Espérance. Propriétés

Exemple

Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$.

① *Si $X(\Omega)$ est fini, alors $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut :* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$

② *Si $X(\Omega)$ est dénombrable infini, noté : $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors : $\mathbb{E}(X)$ existe si la série* $\sum\limits_{n \geq 0} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ *converge absolument. Alors* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$

Exemple *Exemple 1.8*

Soit X_1 v.a.r.d. dont la loi est définie par $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que X_1 admet une espérance et calculer sa valeur.

Exemple *Exemple 1.9*

Soit X_2 v.a.r.d. dont la loi est définie par $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_2 = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
Montrer que X_2 n'admet pas d'espérance.

Théorèmes *Theorème de transfert*

Soit X variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et Y variable aléatoire discrète définie par : $Y = f(X)$ avec $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_f$.

① *Si $X(\Omega)$ est fini, $\mathbb{E}(Y)$ existe et vaut : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.*

② *Si $X(\Omega)$ est infini, noté $X(\omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on dira que Y admet une espérance si la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Sous cette condition :*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Exemple *Exemple 1.10*

On suppose que X suit la loi de Poisson définie dans l'exemple 1.3. Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X^2)$ et la calculer.

Exemple *Exemple 1.11*

Soit X de loi définie par : $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2 \cdot 3^{|n|}}$ et $Y = 2^X$. Justifier l'existence de $\mathbb{E}(Y)$ et la calculer.

Propriété *Proposition 1.4*

Soit X variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Si X admet une espérance, alors $Y = aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$

Propriété

Proposition 1.5 Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs positives ($X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) et admettant une espérance. Alors :

$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

1.3 Moments, Variance, écart-type

Définition

Définition. Moments d'ordre r

Soit X une variable aléatoire discrète et $r \in \mathbb{N}^*$.

① *Si $X(\Omega)$ est fini, alors $m_r(X)$ existe et vaut : $m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbb{P}(X = x)$*

② *Si $X(\Omega)$ est infini, noté $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors $m_r(X)$ existe si la série $\sum_{n \geq 0} x_n^r \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Alors $m_r(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbb{P}(X = x)$.*

✐ **Remarque :** Le moment d'ordre 0 vaut 1 et le moment d'ordre 1 vaut $\mathbb{E}(X)$.

Propriété

Proposition 1.6

Soit X une variable aléatoire discrète et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

X admet un moment d'ordre $r \Leftrightarrow X^r$ admet une espérance.

Définition

moments d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et r un entier naturel.
On dit que X admet un `moment d'ordre` r si $\mathbb{E}(X^r)$ existe.
On dit que X admet un `moment centré d'ordre` r si $\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^r\right)$ existe.
On appelle `variance de` X et on note $\mathbb{V}(X)$ le moment centré d'ordre 2 de X s'il existe.
Sa racine carrée $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ est appelée `écart-type` de X et se note $\sigma(X)$. Il se mesure dans les mêmes unités que X

Conséquence : Dans le cas d'une variable aléatoire discrète infinie d'espérance $\mathbb{E}(X) = m$ pour laquelle $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on dira que $\mathbb{V}(X)$ existe si la série $\sum_{n \geq 0} (x - m)^2 \mathbb{P}(X = x_n)$ converge (absolument). Si c'est le cas :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - m)^2 \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - m)^2 \mathbb{P}(X = x)$$

Propriété

Formule de Koënig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance. Alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

Exemple

Exemple 1.12

On suppose que X suit la loi de Poisson définie dans l'exemple 1.3. Justifier l'existence de $\mathbb{V}(X)$ et la calculer.

Propriété

Proposition 1.7

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance. Alors :

- *Si elle existe, la variance de X est positive.*
- $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Définition

variables aléatoires centrées et réduites

- *Une variable aléatoire X admettant une espérance est dite* `centrée` *si* $\mathbb{E}(X) = 0$
- *Une variable aléatoire X admettant une variance est dite* `réduite` *si* $\mathbb{V}(X) = 1$.
- *Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On appelle* `variable centrée réduite associée à` X *la variable notée X^* et définie par*

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Propriété

Proposition 1.8

Soit X^* variable centrée réduite associée à X. Alors :

$$\mathbb{E}(X^*) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(X^*) = 1$$

Propriété

Proposition 1.9 - Moments et indépendance

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

Remarque 2.6 : Les collections de n variables aléatoires indépendantes jouent un rôle fondamental dans la modélisation statistique au sein de laquelle elles sont appelées échantillon.
On notera donc que ce dernier résultat se généralise par récurrence au cas de n variables aléatoires indépendantes admettant une variance en écrivant :

$$\boxed{\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)}$$

2 Lois usuelles discrètes

2.1 Lois usuelles de première année

2.1.1 Loi uniforme

Définition *Loi uniforme*

On dit que X suit une `loi uniforme` *sur* $[\![1,n]\!]$ *et on note* $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ *si :*
- $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$
- $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{n}$

Modèle : Tirage équiprobable d'une boule parmi n boules numérotées de 1 à n. X est égale au numéro de la boule tirée.

Propriété *Espérance de la loi uniforme*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ *alors* $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$

Exemple *Exemple 2.1*

Pour les besoins d'un échantillonnage, des parcelles d'égales surfaces ont été numérotées de 0 à n. On effectue un tirage au hasard de l'une d'entre elle et on note X le numéro obtenu. Préciser la loi de X et son espérance.

2.1.2 Loi de Bernoulli

Définition *Loi de Bernoulli*

On dit que X suit une `loi de Bernoulli` *de paramètre p et on note* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ *si :*
- $X(\Omega) = \{0,1\}$
- $\mathbb{P}(X=1) = p$ *et* $\mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$

Modèle : On suppose une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles dont l'une est considérée comme un succès de probabilité égale à p.
X est une variable aléatoire de Bernoulli si elle associe 1 à la réalisation de de ce succès, 0 sinon.
On a $X = \mathbf{1}_S$ où $\mathbf{1}_S$ désigne la variable indicatrice sur S. On parlera donc indifféremment de variable de loi de Bernoulli ou de variable indicatrice.

Propriété *Espérance et variance de la loi Bernoulli*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ *alors* $\mathbb{E}(X) = p$ *et* $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$

2.1.3 Loi Binomiale

Définition

Loi Binomiale

On dit que X suit une `loi Binomiale` *de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si :*
– $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
– $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

Modèle : Une épreuve aléatoire consiste en une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, probabilité du succès (on pensera à n tirages avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules blanches).
On dira que X suit une loi binomiale si elle dénombre les succès au cours de ces n épreuves successives (par exemple le nombre de boules blanches).

Propriété

Espérance et variance de la loi binomiale

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = npq$

2.1.4 Loi Hypergéométrique

Définition

Loi hypergéométrique

On dit que X suit une `loi hypergéométrique` *de paramètres N, n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ si :*
– $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$
– $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Modèle : Une urne contient N boules dont une proportion p de boules rouges. On effectue n tirages sans remise dans cette urne ou encore un tirage par poignée de n boules.
On dira que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p si elle dénombre les succès, ici le nombre de boules rouges, au cours de cette épreuve.

Propriété

Espérance de la loi hypergéométrique

Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$

Propriété *Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale*

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Pour N suffisamment grand,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \approx F_Y(x) \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) \approx \mathbb{P}(Y = k)$$

Remarque : Dans la pratique, cette approximation est acceptée dès que $n \leq \dfrac{N}{10}$.

2.2 Lois usuelles discrètes infinies

2.2.1 Loi de Poisson

Définition *Loi de Poisson*

On dit que X suit une `loi de Poisson` *de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :*

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

Modèle : Il n'y a pas de situation type pour cette loi de probabilité. On retiendra cependant qu'elle est souvent utilisée pour modéliser le nombre de personnes se présentant à un guichet (files d'attente), des événements rares ou encore comme approximation d'une loi binomiale dans certains cas limite (cf. ci-dessous).

Propriété *Espérance et variance de la loi de poisson*

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$

Exemple *Exemple 2.2*

Soit Y_t variable aléatoire égale au nombre d'appels vers un standard sur la durée t. On suppose que $Y_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t)$ où $\lambda > 0$. Quelle est la loi suivie par X, variable aléatoire égale au temps d'attente du premier appel ?

Exemple *Exemple 2.3*

Un magasin possède n caisses. On suppose que le nombre de clients se présentant dans le magasin suit une loi de poisson de paramètre λ et que ceux-ci, une fois entrés, se répartissent de façon indépendante et équiprobable entre les différentes caisses. Déterminer la probabilité que k clients se soient présentés à la caisse n°1 ?

Propriété *Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson*

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = np$. Pour n grand et p petit,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \approx F_Y(x) \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) \approx \mathbb{P}(Y = k)$$

Remarque : Dans la pratique, cette approximation est acceptée dès que $n \geq 30$ et $p \leq 0.1$.

Exemple

Exemple 2.4

Sachant que l'incidence du diabète dans la population générale est de 2%, quelle est, dans une école de 200 élèves, la probabilité pour que plus de 2 élèves soient diabétiques ?

Exemple

Exemple 2.5

Loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bactéries dans un volume élémentaire fixé

2.2.2 Loi géométrique

Définition

Loi géométrique

On dit que X suit une `loi géométrique` *de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :*
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$ *où* $q = 1 - p$.

Modèle : On dira que X suit une loi géométrique de paramètre p si X dénombre les épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

Propriété

Espérance et variance de la loi géométrique

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ *et* $\mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$

Propriété

invariance temporelle

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}_{(X>n)}(X > n + p) = \mathbb{P}(X > p)$

Attention : On parle parfois de loi géométrique sur $\mathbb{N}$ lorsqu'on dénombre le nombre d'échecs précédant le premier succès au cours d'une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = ...$
Par ailleurs, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et valent respectivement : ....