13 T.D. Applications linéaires et matrices.

- Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes, opérations sur les applications linéaires. Noyau - lien avec l'injectivité. Image - lien avec la surjectivité.
- Cas de la dimension finie. Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base. Théorème du rang. Équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité **pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension** (finie).
- Matrices et applications linéaires. Matrice de la somme, du produit par un scalaire et de la composée d'applications linéaires. Matrice de l'application réciproque.
- Changement de base. Matrice de passage. Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables.

Exercice 1 : ✶

Pour chacune des applications ci-dessous :

① Montrer que ce sont des endomorphismes.

② Déterminer leur noyau et image en précisant les cas où les applications sont injectives, surjectives ou bijectives.

③ Donner leur représentation matricielle dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés. Montrer comment retrouver les réponses à la question 2.

➢ f_1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_1(x,y) = (-x-y, 2x+2y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

➢ f_2 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f_2(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

➢ f_3 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_3(x,y) = (x-y, x, x+2y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

➢ f_4 définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f_4(P) = P(2)$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

➢ f_5 définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f_5(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

➢ f_6 définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f_5(P) = P(1) + P'(0)(X+X^2) + P(0)X^2$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$.
✐ Montrer dans ce dernier cas que $F = \text{Vect}\{1, X^2\}$ est stable par f.

Exercice 2 :✶

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est le plan vectoriel engendré par $u = (1,0,0)$ et $v = (1,1,1)$.

Exercice 3 :✶

Soit un réel a et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t)$$

① Montrer que f n'est pas injective.

② Déterminer les réels a pour lesquels f est surjective. Donner dans ce cas une base de $\ker f$.

Exercice 4 ✶ :

① Soit f un endomorphisme de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \Leftrightarrow \text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0_E\}$.

② Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que $f \circ g = id_E \Rightarrow \text{Ker} f \cap \text{Im} g = \{0_E\}$.

Exercice 5 : ✶

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit T, l'application définie par :

$$\forall f \in E,\ T(f) = g \text{ où } g(x) = \int_0^x tf(t)dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

① Montrer que T est un endomorphisme de E.

② Montrer que T est injectif mais pas surjectif.

Exercice 6 : ✶ ✶

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

① Déterminer $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$ suivant les valeurs des réels a et b.

② Vérifier que $(2, 0, 1)$ est solution du système (S) ci-dessous et, sans calcul supplémentaire, donner la solution générale.

$$(S)\ \begin{cases} -2x + by + z & = -3 \\ x - 2by + z & = 3 \\ x + by - 2z & = 0 \end{cases}$$

Exercice 7 : ✶

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^{2x},\ f_2(x) = xe^{2x} \text{ et } f_3(x) = (3x + 1)e^{2x}$$

On note E l'espace vectoriel engendré par f_1 et f_2.

① Montrer que E est un espace vectoriel et que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de E.

② Montrer que l'application ψ définie sur E par : $\forall f \in E$, $\psi(f) = f'$ est un endomorphisme de E.
Exprimer sa matrice A dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$.

③ Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$. En déduire la dérivée n-ième de la fonction f_3 pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 8 : ✶

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

① Vérifier que $A^2 = 0$.

② Donner une base de $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$.

③ **a.** Trouver un vecteur u tel que $f(u) \neq 0$.
b. Montrer que $(u, f(u))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
c. Compléter cette famille par un vecteur v de $\text{Ker}f$ pour que $(u, f(u), v)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

④ Écrire la matrice A' de f dans cette nouvelle base.

Exercice 9 : ✶✶✶

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'application f définie sur E vérifiant $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$ et $|f(-1)| \leq 1$.

① Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (\frac{1}{2}x(x + 1), \frac{1}{2}x(x - 1), 1 - x^2)$ est une base de E et décomposer f dans cette base.

② En déduire que si $|x| \leq 1$, $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$.

③ On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ et on prend g l'élément de E donné par $g(x) = cx^2 + bx + a$.
a. Déterminer la base $\mathcal{B}'$ de E telle que les coordonnées de g dans $\mathcal{B}'$ soient les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.
b. En déduire que $\forall |x| \leq 1$, $|g(x)| \leq 2$.

Exercice 10 : ✶✶ Matrices semblables

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

① Montrer que A et D sont semblables et donner une matrice P telle que $P^{-1}AP = D$.

② A est-elle inversible ?

③ Déduire de la question 1. un calcul simplifié qui prouve que $(A - 2I_3)(A - 4I_3) = 0$.

④ On souhaite écrire une fonction Python permettant le calcule de A^n.

- **a.** Comment créer la matrice A avec Python ?
- **b.** Rappeler la bibliothèque et la fonction Python utilisée pour calculer le produit matriciel de A par B où A et B sont deux matrices quelconques et écrire une fonction qui retourne l'expression de A^n.

⑤ Montrer que : $\exists!(A_1, A_2)/\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n A_1 + 4^n A_2$.

Exercice 11 : ✶✶ Étude de l'évolution d'une forêt

On s'intéresse à une forêt composée de deux essences d'arbres dont nous suivons l'évolution au cours des années. On notera A_n et B_n respectivement le nombre d'arbres de l'espèce A et de l'espèce B au sein de cette forêt l'année n.

Nous supposerons que les arbres de l'espèce A ont une durée de vie plus longue et que seulement 1% d'entre-eux meurt en moyenne quelle que soit l'année tandis que c'est le cas pour 5% de l'espèce B.
Parce que leur croissance est plus rapide, les arbres de l'essence B ont plus de chance que ceux de l'essence A de s'imposer sur un emplacement laissé vacant . Ainsi, 75% des places nouvellement libres sont colonisées par des arbres de l'espèce B tandis que seulement 25% d'entre elles le sont pas l'espèce A.

① Montrer que l'évolution du système peut être modélisé, pour tout n entier naturel, par la relation matricielle $X_{n+1} = M \cdot X_n$ où

$$M = \begin{pmatrix} 0,9925 & 0,0125 \\ 0,0075 & 0,9875 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$

Pour la suite, on suppose qu'on débute avec une répartition formée de $A_0 = 10$ arbres d'essence A et $B_0 = 990$ arbres d'essence B.

② Écrire une fonction python `evolution` permettant de simuler l'évolution de cette forêt au cours du temps en fonction de ces conditions initiales.

③ Recherchons une explication à ce phénomène :

- **a.** Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2$, telles que : $M - \lambda I_3$ est non inversible.
- **b.** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_3)$ pour chacune de ces valeurs et montrer que leur juxtaposition forme une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
- **c.** En déduire que M est semblable à une matrice diagonale D qu'on déterminera et exprimer M^n en fonction de D^n.
- **d.** Montrer que $X_n = M^n X_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et conclure sur le comportement asymptotique de l'évolution de la forêt.

④ On imagine que durant les années sèches, le taux de mortalité de l'espèce B est plus important et qu'en conséquence, la matrice de projection devient :

$$Ms = \begin{pmatrix} 0,9925 & 0,0975 \\ 0,0075 & 0,9025 \end{pmatrix}$$

- **a.** Interprétez l'évolution des coefficients et évaluer l'impact d'années de sécheresse répétées sur l'évolution de la forêt.
- **b.** Simuler l'évolution de la forêt en supposant cette fois une alternance régulière entre années humides et années sèches.