CHAP. 6 Applications linéaires et matrices

Les capacités attendues : « Obtenir la matrice d'une application linéaire dans des bases données ; déterminer un noyau et une image ; opérer un changement de base ; démontrer que deux matrices sont semblables »

✐ Dans l'ensemble du chapitre, $\mathbb{K}$ désignera aussi bien $\mathbb{R}$ que $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

1.1 Définitions et opérations

Définition

Définition 1.1.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle `application linéaire` *de E dans F tout application f vérifiant :*

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall(u,v)\in E^2,\ f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)$$

✐ ***Remarque 1.1.*** :

- Si $F=\mathbb{K}$, on parle de `forme linéaire`
- Si $E=F$, f est un `endomorphisme de` E
- Si f est bijective, f est un `isomorphisme` de E dans F
- Si $E=F$ et f est bijective, on dira que f est un `automorphisme de` E.

Pour montrer que f est un endomorphisme de E on montrera :

① f est linéaire.

② $f(E)\subset E$ ou encore $\forall u\in E, f(u)\in E$.

✐ ***Notations :***

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Propriété

prop.1.1.

Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

① $\forall u\in E, f(-u)=-f(u)$

② $f(0_E)=0_F$

Exemples

Exemple 1.1

$$f_1:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & x\end{array}\qquad f_2:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & ax+by+cz\end{array}\qquad f_3:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,x+y)\end{array}\qquad f_4:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y,x+2y)\end{array}$$

$$f_5:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+4y-2z,-2x+5y-2z,-3x+6y-2z)\end{array}$$

Exemples (suite)

Exemple 1.1

$$\varphi_1 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \qquad \varphi_2 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) \qquad \varphi_3 : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) \qquad \varphi_4 : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longmapsto P(1)X + P(0) \qquad f \longmapsto f' - f \qquad f \longmapsto f'' + f \qquad f \longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)dt$$

Et enfin

$$\psi_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \psi_2 : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$
$$u \longmapsto < u, v > \text{ où } v \in \mathbb{R}^3 \qquad A \longmapsto {}^t A$$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

1.2.1 Addition :

f et g étant deux applications linéaires de E dans F, on définit leur somme par :

$$\forall u \in E,\ (f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

1.2.2 Multiplication par un scalaire :

Soit f une application linéaire de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit la multiplication par un scalaire par :

$$\forall u \in E, (\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u)$$

Propriété

prop.1.2. Structure d'espace vectoriel

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot f + g \in \mathcal{L}(E,F)$$

1.2.3 Composition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors on définit la composée de f et de g par :

$$\forall u \in E,\ (g \circ f)(u) = g(f(u))$$

Propriété

prop.1.3.

$$f \in \mathcal{L}(E,F), g \in \mathcal{L}(F,G) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$$

Propriété

prop.1.4.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f^0 = id_E$ et f^n définie par $f^{n+1} = f^n \circ f$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sont des endomorphismes de E.

Propriété

prop.1.5. : binôme de Newton

Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors la formule du binôme de Newton s'applique et permet d'écrire :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^k f^{n-k}$$

1.2.4 Réciproque :

Si f est un isomorphisme de E dans F alors f admet une unique application réciproque notée f^{-1} vérifiant :

$$f \circ f^{-1} = id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = id_E$$

Propriété

prop.1.6. : linéarité de l'application réciproque

Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E

Propriété

prop.1.7. : composée d'isomorphismes

Si f est un isomorphisme de E dans F et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

1.3 Noyau et image

Définition

Définition 1.2. : Noyau

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau *de f l'ensemble noté $Kerf$ et défini par :*

$$Kerf = \{u \in E / f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Propriété

prop.1.8.

Si f est une application linéaire de E dans F alors $Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E

Définition

Définition 1.3. : Image

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image *de f l'ensemble noté Imf et défini par :*

$$Imf = \{v \in F / \exists u \in E, f(u) = v\} = f(E)$$

Propriété

prop.1.9.

Si f est une application linéaire de E dans F alors Imf est un sous-espace vectoriel de F

Propriété

prop.1.10.

Si f est une application linéaire de E dans F alors :

- ➢ *f est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$.*
- ➢ *f est surjective si et seulement si $Imf = F$.*
- ➢ *f est bijective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$ et $Imf = F$.*

Quelques relations utiles
– Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Si $g \circ f = 0$ alors $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$
– Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \mathrm{Ker} f & \subset \mathrm{Ker} f^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker} f^n \\ \mathrm{Im} f^n & \subset \cdots \subset \mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f \end{cases}$

2 Cas de la dimension finie

✐ ***Caractérisation :*** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors f est entièrement déterminée par l'image de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire par la connaissance de $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$. En particulier : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}}$

Conséquence : Deux applications linéaires de E dans F sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E.

Propriété

prop.2.1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Définition

Définition 1.3. : Rang d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle `rang de` *f et on note $rg(f)$ la dimension de l'image de f.*

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = rg\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$$

Propriété

prop.2.2. : Formule du rang

*Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, E étant un espace vectoriel de **dimension finie**, alors :*

$$\dim(E) = \dim(Ker f) + rg(f)$$

Propriété

prop.2.3.

*Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels **de même dimension**. Alors :*

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Propriété

prop.2.4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. On a :

① $rg(f) \leq inf(\dim(E), \dim(F))$
② f *injective* $\Leftrightarrow rg(f) = \dim(E)$
③ f *surjective* $\Leftrightarrow rg(f) = \dim(F)$

3 Matrices et applications linéaires

3.1 Matrice d'une application linéaire

Définition

matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ où p et n sont les dimensions respectives de E et de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle `matrice de` f `relativement aux bases` $\mathcal{B}_E$ `et` $\mathcal{B}_F$ *la matrice des coordonnées de la famille de vecteurs $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_F$*

Si

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1})_{\mathcal{B}_F} = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ f(e_2) &= (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2})_{\mathcal{B}_F} = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ &\cdots \\ f(e_p) &= (a_{1p}, a_{2p}, \cdots, a_{np})_{\mathcal{B}_F} = a_{1p}\varepsilon_1 + a_{2p}\varepsilon_2 + \cdots + a_{np}\varepsilon_n \end{aligned}$$

on écrira :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque 3.1. : Si $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$ on notera plus simplement : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(f)$

Remarque 3.2. : Toute application linéaire admet une infinité de représentations matricielles possibles mais, les bases des espaces vectoriels de départ et d'arrivée étant fixées, il n'existe qu'une seule écriture matricielle possible dans ces bases.

Exemple

exemple 3.1.

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ la base canonique de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ où $e'_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}}$ et $e'_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}}$. Ecrire $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(id_E)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(id_E)$

3.2 Opérations sur les applications linéaires et matrices

Propriété

prop.3.1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $u \in E$ et $v = f(u)$. Si on note $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(u)$ alors

$$Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \cdot X$$

Théorèmes

Théorème 3.1. : opérations sur les matrices

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

① *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f+g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g)$*

② *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$*

③ *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$*

④ *Soi $f \in \mathcal{L}(E)$, f bijective, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(f))^{-1}$*

Propriété

prop.3.2.

Soit E espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

$$\begin{aligned} f \textit{ bijectif } &\Leftrightarrow A \textit{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \cdot B = I_n \\ &\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / B \cdot A = I_n \\ &\Leftrightarrow rg(A) = n \end{aligned}$$

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut-être vue comme matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
On s'autorisera donc de parler d'image, de noyau et de rang de la matrice A en lien avec les mêmes notions pour les applications linéaires. Soit :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\},\ \mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = Y\}\,;\ \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$$

4 Changement de bases

4.1 Changement de base. Matrice de passage

Définition

définition 4.1. : matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E. Il est possible d'écrire :

$$\begin{cases} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n \\ e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n \\ \vdots &= \vdots \\ e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n \end{cases}$$

On appelle `matrice de passage de` $\mathcal{B}_E$ `à` $\mathcal{B}'_E$ *la matrice P des coordonnées de la famille $\mathcal{B}'_E$ exprimée dans la base $\mathcal{B}_E$, à savoir :*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice passage P de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$ peut s'interpréter comme la matrice de l'application linéaire id_E relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ en remarquant que $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(id_E)$.

Propriété

prop.4.1. Inversibilité

Toute matrice de passage est inversible

Propriété

prop.4.1. Inversibilité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.
Si P désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$, alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'_E$ à la base $\mathcal{B}_E$ est la matrice P^{-1}.

4.2 Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Propriété

prop.4.2.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases distinctes $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$.
soit u un vecteur de E et $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(u)$, $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E}(u)$. Alors :

$$\boxed{X = PX'}$$

4.3 Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Propriété

prop.4.3.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases distinctes $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$.
soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(f)$ et $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E}(f)$. Alors :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Définition

définition 4.2. : matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
A et B sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

Propriété

prop.4.4.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(f) \text{ semblable à } B \Leftrightarrow \text{il existe une base } \mathcal{B}'_E \text{ de } E \text{ telle que } B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E}(f)$$

ou encore :

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme exprimé dans deux bases distinctes.

Propriété

prop.4.5.

Si A et B sont deux matrices semblables, alors :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow B \text{ inversible}.$$

Propriété

prop.4.6. : Calcul de puissances

Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$.
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = P^{-1}A^nP$$