MATHEMATIQUES
Var à densité et algèbre

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème qu'on prendra soin de lire ***en entier*** *avant de commencer (on suggère de passer 1/2 heure sur l'exercice et 2h30 sur le problème).*
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'****est pas*** *autorisé.*
Si au cours de l'épreuve, vous repèrez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-là sur la copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice :

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles à densité et indépendantes, alors $S+T$ est une variable à densité dont une densité est donnée, sous réserve de convergence de l'intégrale, par la formule :

$$f_{S+T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(t) f_T(x-t) dt$$

① Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$ et soit λ un réel strictement positif. On note $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

② On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On note $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que pour $n \geq 1$, S_n admet pour densité la fonction f_n donnée par :

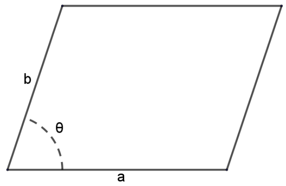
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

③ a) Écrire une fonction Python `simulX(la)` qui simule la réalisation d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

b) La variable aléatoire S_n étant celle définie à la question 2., écrire une fonction Python `estimProbaS(n,la,a,m)` qui retourne une estimation de $\mathbb{P}(S_n \leq a)$ avec pour arguments d'entrée un entier n non nul, le paramètre `la`$=\lambda$ de la loi exponentielle, un réel $a > 0$ et un entier m supposé grand (de l'ordre du millier).

Problème : D'après Agro-Véto A 2015

On considère un réseau dont la maille élémentaire est un parallélogramme, structure présente notamment en cristallographie. Cette maille élémentaire a alors pour aire $a \cdot b \cdot \sin(\theta)$.



On suppose que l'angle θ est la réalisation d'une variable aléatoire θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$. L'étude de la variable aléatoire $\sin(\theta)$ nécessite certaines connaissance sur une fonction intermédiaire notée A qui seront établies dans la partie I. La densité obtenue dans la partie II dont nous étudierons quelques propriétés apparaît en pratique dans d'autres contextes (que nous n'étudierons pas dans ce sujet) sous une forme proche dans la loi dite de « l'arcsinus ». Les deux dernières parties étudient des fonctions polynomiales définies à l'aide de la fonction A.

Partie I : Définition et propriétés de la fonction *A*

① Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$.
On note alors A la réciproque de la fonction $\begin{array}{rcl}[-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x)\end{array}$

② Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

④ Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et justifier que sur cet intervalle l'expression de sa dérivée est $A'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$.

⑥ a) Déterminer le développement limité à l'ordre un de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + t}}$.

b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

Partie II : Étude d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $X = \sin(\Theta)$.

① Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition F_X de X.

② En déduire que X est une variable aléatoire à densité puis montrer qu'elle admet pour densité

$$f_X : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

③ a) Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.
b) Quelle est la signification de ce résultat par rapport à la surface des mailles élémentaires introduites dans le préambule du problème ?

④ Montrer que la variable aléatoire X^2 possède une espérance et donner sa valeur.
✐ *On pourra utiliser - sans obligation - le changement de variable $x = \sin(t)$ qu'on justifiera.*

⑤ On s'intéresse, dans cette question, au comportement asymptotique d'un échantillonnage de même loi que X.
Pour cela, on considère un entier naturel n non nul ainsi qu'un n-échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ formé par n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
On introduit la « moyenne empirique » : $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

a) Que valent l'espérance et la variance de M_n ?
b) On rappelle que si Y est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}$$

En déduire, en fonction de n, de l'espérance et de la variance de X, un intervalle $[a_n, b_n]$ tel que :

$$\mathbb{P}(M_n \in [a_n, b_n]) \geq 0.95$$

⑥ On s'intéresse, dans cette question, à des événements « rares » associés à la variable aléatoire X.

a) A l'aide de la question 6. de la partie I., prouver l'existence de constantes α et β telles que :

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{n}\right) - \frac{\alpha}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{n^3}$$

b) Pour tout entier n non nul, on pose $p_n = \mathbb{P}\left(X \geq 1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

i. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii. Prouver que, pour tout entier naturel non nul, on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$.

iii. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre deux de la fonction cos.

iv. En déduire une constante c telle que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

c) On cherche à vérifier grâce à Python la valeur obtenue précédemment pour c.

i. Écrire une fonction `simulX()` qui réalise une simulation de la variable aléatoire X.
✐ *On justifiera notamment comment simuler la réalisation d'une variable aléatoire Θ qui suit une loi uniforme sur $[0, \pi/2]$.*

ii. Ecrire une fonction `evalc(n,m)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier m supposé grand (de l'ordre du millier) et qui retourne une estimation de la constante c obtenue en 6.b)iv).

Partie III : Étude d'une suite de fonctions définies à l'aide de la fonction arcsin

Pour tout entier n, on pose $f_n : x \longmapsto \cos(2nA(x))$.

① Calculer f_0, f_1 et f_2 en utilisant si nécessaire la formule obtenue en I/4.
✐ *On vérifiera en particulier que pour tout entier naturel k inférieur ou égale à 2, il existe un polynôme P_k qu'on exprimera tel que : $\forall x \in [-1,1],\ f_k(x) = P_k(x)$.*

② a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b)+\cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall x \in [-1,1],\ f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x)$$

③ Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré $2n$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = P_n(x)$$

④ Soit n un entier naturel.

a) Calculer f_n' et f_n''. ✐ *On ne cherchera pas à simplifier les résultats.*

b) En déduire que f_n est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(x^2-1)y'' + xy' - 4n^2y = 0$$

Partie IV : Étude d'un endomorphisme lié à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit n un entier naturel non nul et I_n la matrice identité d'ordre n.

① On définit l'application ϕ sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ par :

$$\phi(P) = (X^2-1)P'' + XP',\ \forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

② Dans cette question, on suppose que $n = 1$.

a) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On la notera M.

b) Déterminer une base du noyau et de l'image de ϕ sous forme polynomiale.

c) Montrer qu'il existe 4 valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $M - \lambda I_4$ soit non inversible. On les organisera de façon croissante : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et on notera $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

d) Soit $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / M \cdot X = \lambda X\} = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) / (M - \lambda I_4)X = 0\}$.

i. Justifier que E_λ est un espace vectoriel pour tout λ réel.

ii. Déterminer une base et la dimension de E_λ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$.

iii. Démontrer que la juxtaposition des bases de E_{λ_0}, E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3} forme une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

e) Exprimer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.

③ On revient au cas général où n est un entier non nul quelconque.

a) Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

b) Soit $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} / M - \lambda I_{2n+2} \text{ non inversible}\}$. Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$.

c) Soit $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{2n+2,1}(\mathbb{R}) / (M - \lambda I_{2n+2})X = 0\}$.
Déterminer $\dim(E_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$.

d) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, déterminer $E_{(2k)^2}$ en fonction de P_k, polynôme défini dans la partie III.