



- **Structure vectorielle** : Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs ; sous-espaces vectoriels, intersection finie de ssev ; ssev engendré par une famille finie de vecteurs
Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence) ; Famille libre, famille liée finie ; Base finie d'un espace vectoriel et coordonnées d'un vecteur dans une base.
Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.
- **Dimension** : De toute famille génératrice finie d'un ev E on peut extraire une base.
Dans un ev de dimension n : Toute famille libre a au plus n éléments, une famille libre ayant n éléments est une base ; toute famille génératrice a au moins n éléments, une famille génératrice ayant n éléments est une base.
Si F est ssev de E alors $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales alors $F = E$.

Exercice 1 ★ : Dire dans chacun des cas suivants si les ensembles F sont sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels E donnés.

❶ $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n ($n = 2, 3$ ou 4) :

- ① $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 1\}$
- ② $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\}$
- ③ $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = 0\}$
- ④ $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y \geq 0\}$
- ⑤ $F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / zt = 0\}$
- ⑥ $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
- ⑦ $F_7 = \{u \in \mathbb{R}^3 / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = (a + b, 2a + b, -a + 2b)\}$

❷ $E = \mathbb{R}[X]$ ou $E = \mathbb{R}_n[X]$:

- ① $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_1[X] / P(3) = 0\}$
- ② $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(3) = 0\}$
- ③ $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(-1) = P(1) = 0\}$
- ④ $F_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \geq 2\}$
- ⑤ $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P = (X - 1)P'\}$
- ⑥ $F_7 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / (3X + 8)P(X) + (X^2 - 5X)P'(X) - (X^3 - X^2)P''(X) = 0\}$
- ⑦ $F_8 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(X) = (X - 1)(bX + a + b)\}$.

❸ $E = \mathbb{R}^I$ ou $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, ($n \in \mathbb{N}$)

- ① $F_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est impaire}\}$
- ② $F_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ décroissante sur } \mathbb{R}\}$
- ③ $F_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ admet un DL}_n(0)\}$
- ④ $F_4 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) / f(0) = f(\pi)\}$
- ⑤ $F_5 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$
- ⑥ $F_6 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f'(x) - f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}\}$
- ⑦ $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f''(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

- ④ $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (n \in \mathbb{N})$
- ① $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^t M = -M\}$
 - ② $F_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \exists p \in \mathbb{N}, M^2 = M\}$
 - ③ $F_3 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 - ④ $F_4 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$
 - ⑤ $F_5 = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda \cdot X\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 ★ : Familles libres

- ① Déterminer dans chaque cas si les familles considérées sont libres et préciser leur rang. Lorsque c'est le cas, dire si ce sont des bases des espaces vectoriels E .

- ① $E = \mathbb{R}^3, F_1 = \{(1, -1, 2), (3, 1, 1), (-3, -5, 4)\}$
- ② $E = \mathbb{R}^3, F_2 = \{(0, 1, 3), (-1, 1, 0), (4, 5, 6)\}$
- ③ $E = \mathbb{R}^4, F_3 = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 0), (0, 0, 2, 0)\}$
- ④ $E = \mathbb{R}_2[X], F_4 = \{1, X, X^2, (X-3)(X+1)\}$
- ⑤ $E = \mathbb{R}_3[X], F_5 = \{X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3\}$
- ⑥ $E = \{y/y'' - 2y' + y = 0\}, F = \{x \mapsto e^x, x \mapsto xe^x\}$
- ⑦ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, F = \{x \mapsto e^{kx}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$

- ② Déterminer les vecteurs (x, y, z) de $E = \mathbb{R}^3$ tels que la famille ci-dessous soit libre dans E :

$$\mathcal{F} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (x, y, z)\}$$

En déduire l'équation du plan vectoriel engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$.

- ③ Montrer que les vecteurs suivants engendrent un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 dont on donnera la dimension :

$$u = (1, -1, 0, 2, 1), v = (2, 1, 1, 3, -1), w = (0, 1, 1, 2, 1) \text{ et } t = (4, -2, 0, 5, 0)$$

Exercice 3 ★★ : Bases

- ① Donner une base de chacun des SEV suivants, abordés dans l'exercice 1 sous les numéros suivants :

$$1.2), 3), 6), 7); 2.1), 2), 3), 5) \text{ et } 7); 3.5) \text{ et } 7)$$

ainsi que 4. 5), selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ en considérant successivement :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ② Montrer que les familles suivantes sont des bases de $E = \mathbb{R}_n[X]$:

- ◆ $\mathcal{F}_1 = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ où $a \in \mathbb{R}$.
- ◇ $\mathcal{F}_2 = (1, X, X(X - 1), \dots, X(X - 1) \cdots (X - n + 1))$
- ★ $\mathcal{F}_3 = (X^n, X^{n-1}(1 + X), \dots, (1 + X)^n)$
- ☆ $\mathcal{F}_4 = ((X - a)^k (X - b)^{n-k}, 0 \leq k \leq n)$ où $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$.

Exercice 4 ★ : rang d'une famille de vecteurs

En utilisant l'écriture matricielle d'une famille de vecteurs, déterminer le rang des familles finies suivantes :

- ① $\mathcal{F}_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1), (4, 2, 2)\}$
- ② $\mathcal{F}_2 = \{(1, -1, 0, 2, 1), (2, 1, 1, 3, -1), (0, 1, 1, 2, 1), (4, -2, 0, 5, 0)\}$
- ③ $\mathcal{F}_3 = \{1 - X + 2X^2, 3 + X + X^2, -3 - 5X + 4X^2\}$
- ④ $\mathcal{F}_4 = \{X + 3X^2, -1 + X, 2 + X^2, 4 + 5X + 6X^2\}$

Exercice 5 ★ :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{P \in E/P(1) = 0 = P(2)\}$ et $G = \{P \in E/P(3) = 0 = P(4)\}$.

- ① Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et en donner une base.
- ② Déterminer leur intersection.
- ③ Montrer que la juxtaposition des bases de F et de G obtenues à la question 1. forme une base de E .

Exercice 6 ★ :

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① Calculer A^2 et A^3 puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$. A est-elle inversible ?
- ② Montrer que la famille (A, A^2) est une famille libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- ③ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}$ tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- ④
 - a. Montrer que : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \forall n \geq 1$.
 - b. En déduire la forme explicite de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
 - c. Donner l'expression de A^n en fonction de A et A^2 pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 *** : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_n n nombres réels distincts. On définit des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$L_k(X) = \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

- ① Calculer $L_k(a_j)$ pour tout $(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$
- ② Montrer que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$
- ③ Exprimer la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base \mathcal{L}
- ④ Soit $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Quel est le polynôme $\sum_{i=1}^n a_i^p L_i$?

Donner la matrice des coordonnées de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base \mathcal{L}

Exercice 8 ♥ :

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'application définie sur E et à valeurs dans E qui à toute fonction f de E associe $D(f) = f'$ sa dérivée. Par ailleurs α désigne un réel non nul et on note F_α l'ensemble des fonction de E de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1.

- ① Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de E .
- ② On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}, f_2 : x \mapsto xe^{\alpha x}, f_3 : x \mapsto e^{-\alpha x}, f_4 : x \mapsto xe^{-\alpha x}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F_α .

✎ Pour montrer que la famille est libre, une méthode possible passe par l'utilisation des développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0. On montrera comment.

- ③ On note D_α la restriction de D à F_α , c'est-à-dire l'application définie sur F_α qui à toute fonction f de F_α associe $D_\alpha(f) = f'$, sa dérivée. Montrer que D_α est un endomorphisme de F_α .

✎ A savoir : $\forall f, g \in F_\alpha, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, D_\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D_\alpha(f) + \mu D_\alpha(g)$ et $\forall f \in F_\alpha, D_\alpha(f) \in F_\alpha$.

- ④ On rappelle qu'un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice dans une base donnée est inversible. Soit M_α , la matrice de D_α dans la base \mathcal{B} . Déterminer les coordonnées de $D_\alpha(f_1), D_\alpha(f_2), D_\alpha(f_3)$ et $D_\alpha(f_4)$ dans la base \mathcal{B} et en déduire l'expression de M_α .

- ⑤ Conclure que D_α est un automorphisme.