



- Convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert (✎ « La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive »). Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.
- Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.
- Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres. Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que $f \leq g$.
- Convergence absolue d'une intégrale généralisée. Condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 1 ★ :

Dire dans chacun des cas suivants si l'intégrale est impropre. Si oui, étudier sa nature et donner sa valeur en cas de convergence.

✎ *Remarques* : On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'intégrale dans les cas b) et h), pour e) et g) une IPP permet d'obtenir la valeur de I et, pour f), i) et j), on pourra faire les changements de variables respectifs : $t = \sqrt{x}$, $u = \ln(t)$ et $u = \sqrt{x}$ (rappeler ce que vaut $\arcsin'(t)$).

$$\begin{array}{llll}
 a) I = \int_0^{\infty} te^{-t} dt; & b) I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt; & c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}; & d) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt \\
 e) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}; & f) I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; & g) I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt; & h) I = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \\
 i) I = \int_0^{+\infty} \cos(\ln(t)) dt; & j) I = \int_0^1 \frac{dx}{\pi\sqrt{x}\sqrt{1-x}}; & k) I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt; & l) I = \int_1^{+\infty} e^{-2t^2+4t-1} dt
 \end{array}$$

Exercice 2 ★★ :

- ① Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.
- ② Démontrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{-\ln(x)}{1+x^2} dx$ convergent.
- ③ En déduire la convergence et la valeur de $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.

Exercice 3 ★ :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \arctan(1+x) - \arctan(x)$.

- ① Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.
- ② A l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que $\forall x \geq 1, f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.
En déduire que l'intégrale $\int_1^{\infty} f(t) dt$ est convergente.

③ Pour tout couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que $\int_A^B f(t)dt = \int_B^{B+1} \arctan(t)dt - \int_A^{A+1} \arctan(t)dt$.

④ En déduire que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge et vaut π .

Exercice 4 ★ :

p et λ désignent deux réels strictement positif et $I(p, \lambda) = \int_0^{\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$.

On note par ailleurs $\Gamma(p) = I(p, 1)$.

① Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}$ puis montrer que pour tout a réel, strictement positif, $\int_0^a x^{p-1} dx$ converge (*remarque* : on pensera à distinguer le cas $p \geq 1$ du cas $0 < p < 1$).
En déduire la convergence de l'intégrale $I(p, \lambda)$ à la borne zéro.

② Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p+1}e^{-\lambda x}$ et en déduire que pour x suffisamment grand, $0 \leq x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq \frac{1}{x^2}$.
En déduire la convergence de l'intégrale $I(p, \lambda)$ à la borne $+\infty$.

③ En effectuant le changement de variable $x = \frac{u}{\lambda}$, montrer que $I(p, \lambda) = \Gamma(p)$.

④ Calculer $\Gamma(1)$ et montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

⑤ Soit g définie par $g(u) = 0$ si $u \leq 0$ et $g(u) = \frac{1}{\Gamma(p)} \lambda^p u^{p-1} e^{-\lambda u}$ sinon.
On dira qu'une fonction f est une *densité de probabilité* si f est continue ou continue par morceaux sur \mathbb{R} , f est positive et $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Montrer que g est une densité de probabilité.

⑥ Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)du$ et $\int_{-\infty}^{\infty} u^2g(u)du$ convergent et calculer leurs valeurs.