



– **Intégration** : Intégrale d'une fonction continue f sur un segment (l'existence de primitives pour une fonction continue sur un segment est admise). Lien avec la notion d'aire pour une fonction continue positive. Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

Compléments : Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Intégrations par parties. Changements de variables (☞ « Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'une intégration par parties ou d'un changement de variable sera indiquée »).

– **Calcul différentiel** : Résolution des équations différentielles du type $y' + a(t)y = f(t)$ où a et f sont des fonctions continues sur un intervalle et à valeurs réelles. Méthode de variation de la constante.

Exemples de résolution d'équations différentielles incomplètes du type $y' = F(y(t))$, F étant une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles. Exemple issus de la biologie des populations ou de la cinétique chimique.

Résolution de $y'' + ay' + by = f(t)$ où a et b sont des réels et f est une fonction continue sur un intervalle, la forme d'une solution particulière étant donnée quand $f(t) = Q(t)e^{mt}$, $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $f(t) = \cos(\omega t)$.

1 Calcul intégral

Exercice 1 * : Calculer les intégrales usuelles suivantes :

$$\begin{aligned} a) I &= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx; & b) I &= \int_0^{\pi/6} \sin(3x) dx; & c) I &= \int_0^x \sqrt{2t+1} dt; & d) I &= \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx \\ e) I &= \int_1^x \left(t^2 + \sqrt{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt; & f) I &= \int \sin^3(x) dx; & g) I &= \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx; & h) I &= \int_1^2 \frac{x dx}{(x^2+1)^2} \\ i) I &= \int \frac{dx}{x^2+4}; & j) I &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}; & k) I &= \int te^{-t^2/2} dt; & l) I &= \int_0^{\pi/4} (2+2\tan^2 x) dx \end{aligned}$$

Exercice 2 * : Intégration par parties et changements de variables

$$\begin{aligned} a) I &= \int_0^1 \arctan(t) dt; & b) I &= \int t^2 e^{-t^2/2} dt; & c) I &= \int t^2 e^{-2t} dt; & d) I &= \int \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) dx \\ e) I &= \int_2^5 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} \text{ (avec } u = \sqrt{x-1}\text{);} & f) I &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ (avec } x = \cos u\text{);} & g) I &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx; \end{aligned}$$

avec, pour g), les changements de variables successifs : $x = \sin u$ et $v = \tan u$.

Exercice 3 : Intégrales et relations de récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$.

- ① Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire sa nature.
- ② Établir une relation entre u_n et u_{n+1} .
- ③ Calculer u_0 . En déduire une expression de u_n .
- ④ En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 3 : fonctions définies par une intégrale

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$g(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \text{ et } \forall x \neq 0, f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

- ① Étudier la parité de f .
- ② Montrer que g est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Donner une expression de sa dérivée.
- ③ Donner une relation simple entre f et g . En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $f'(x)$.
- ④ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que f admet une limite en $+\infty$.
- ⑤ Appliquer le théorème des accroissements finis pour obtenir une majoration de $|\cos t - 1|$.

En déduire la limite en 0 de h définie par $h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Conclure sur le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice 4 : fonctions définies par une intégrale (suite)

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- ① Construire le tableau de variation de g sur $[0, +\infty[$. Déterminer notamment la limite et la branche infinie de g en $+\infty$.
Donner l'allure de la courbe représentant g sur $[0, +\infty[$.
- ② Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - x$.
Déterminer le signe de h sur $[0, +\infty[$.
- ③ On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 \in [0, +\infty[$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.
Déterminer la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0 .

Exercice 5 : sommes de Riemann

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}, \forall n \geq 1$.

- ① Montrer que $nu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I$ où I est l'intégrale sur l'intervalle $[0, 1]$ d'une fonction f qu'on précisera.
- ② Déterminer I grâce au changement de variable $t = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)$.
- ③ En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. En faire la vérification grâce à une fonction Python.

2 Calcul différentiel

Exercice 1 ★ : Equations différentielles du premier ordre

Résoudre les ED suivantes d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ supposée dérivable.

- ① $y' - xy = x, I = \mathbb{R}$
- ② $y' - 2y = 8x^2 - 8x, I = \mathbb{R}$
- ③ $y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x, I = \mathbb{R}$.
☞ On cherchera une solution particulière de la forme : $y : x \mapsto ae^x + b \cos x + c \sin x, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
- ④ $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}, I = \mathbb{R}$
- ⑤ $xy' - y + \ln x = 0, I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2 ★ : Equations différentielles du second ordre

Résoudre les ED suivantes d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ supposée deux fois dérivable.

- ① $y'' + y = e^x$
- ② $y'' - 4y' + 4y = 7 \sin x - \cos x$
☞ On cherchera une solution particulière de la forme $y : x \mapsto a \sin x + b \cos x, (a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ③ $y'' - 3y' + 2y = xe^x$. ☞ On cherchera une solution particulière de la forme : $(ax^2 + bx + c)e^x, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
- ④ $y'' - 3y' + 2y = xe^{-2x}$. ☞ On cherchera une solution particulière de la forme : $(\alpha x + \beta)e^x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
- ⑤ $y'' - 3y' + 2y = x(e^x + e^{-2x})$

3 Problème de synthèse

Soit φ une application dérivable sur \mathbb{R}_+ . On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x).$$

On note G et F les applications de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x e^t \varphi(t) dt \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{G(x)}{e^x - 1}.$$

- ① Montrer que G et F sont des applications de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- ② **a.** Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 : $F(x) = \varphi(0) + \frac{x}{2}\varphi'(0) + o(x)$.
b. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
- ③ Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle : $(\mathcal{E}_0) \quad (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = 0$.
- ④ Montrer que F vérifie (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}_+^* .
- ⑤ **a.** Exprimer la solution générale de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}_+^* .
b. Vérifier que F est l'unique solution de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}_+^* possédant une limite finie quand x tend vers 0.
- ⑥ La fonction F est-elle une solution de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}_+ ?
- ⑦ On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur \mathbb{R}_+ . Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi(x) \leq F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x = 0$? En déduire que F est décroissante sur \mathbb{R}_+ .