# 5 CHAP. 5 Variables aléatoires à densité

*Les capacités attendues* : « Justifier le fait qu'un variable aléatoire admet une densité ; calculer une espérance et une variance ; appliquer le produit de convolution »

## 1 Densités de probabilité

### 1.1 Définitions et première propriétés

**Définition** *Définition 1.1.*

*On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ est à densité s'il existe une fonction $f$ positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

*Une telle fonction, qui n'est pas unique, est appelée une* `densité` *de $X$.*

✐ ***Remarque 1.1.*** : Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire $X$, c'est justifier que $X$ admet une densité et en donner une.

✐ ***Remarque 1.2.*** : On note que cette définition doit être compatible avec les propriétés connues des fonctions de répartition, à savoir que ce sont des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\underset{x\to-\infty}{lim} F_X(x) = 0$ et $\underset{x\to+\infty}{lim} F_X(x) = 1$.

**Propriété** *prop.1.1.*

*$X$ admet une densité si et seulement si sa fonction de répartition $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

**Propriété** *prop.1.2.*

*Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ et de fonction de répartition $F_X$. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leq b$. Alors :*

① $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$

② $\mathbb{P}(X = a) = 0$

③ $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

④ $\mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X \geq a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = 1 - F_X(a)$

⑤ $\mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \leq b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = F_X(b)$

**Propriété**

*prop.1.3.*

*Si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, **positive**, **continue** sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que :* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *converge et vaut $1$, alors il existe une variable aléatoire $X$ dont $f$ est une densité*

.

**Définition**

*Définition 1.2.*

*Toute fonction qui vérifie les propriétés ci-dessus est dite* `densité de probabilité` *sur $\mathbb{R}$.*

**Exemple**

*Exemple 1.1*

*Soit $f_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par* $f_1(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

*Montrer que $f_1$ est une densité et déterminer la fonction de répartition de $X_1$ dont $f_1$ est une densité.*

**Exemple**

*Exemple 1.2*

*Soit $f_2$ définie sur $\mathbb{R}$ par* $f_1(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

*Montrer que $f_2$ est une densité et déterminer la fonction de répartition de $X_2$ dont $f_2$ est une densité.*

**Méthode**

*Déterminer une densité à partir de sa fonction de répartition :*

*Si $X$ est une variable aléatoire à densité dont on connaît sa fonction de répartition $F_X$, on obtient une densité de $X$ en dérivant $F_X$ en tout point où elle est dérivable et en la prolongeant par des valeurs positives (le plus souvent $0$) en toutes les autres valeurs. Soit :*

$$f(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } F(x) \text{ est dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Propriété**

*prop.1.4.*

*Soit $X$ variable aléatoire de densité $f$ et soit $I$ un intervalle $\mathbb{R}$. Alors*

$$X(\Omega) \subset I \Leftrightarrow f \text{ est nulle en dehors de } I, \text{ sauf peut-être en un nombre fini de points.}$$

## 1.2 Composition - loi du minimum et du maximum de plusieurs variables aléatoires

### 1.2.1 loi de $u(X)$

Dans l'ensemble des exemples qui suivent $X$ est une variable aléatoire de densité $f$ et on demande la loi de $Y = u(X)$ où $u$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur $X(\Omega)$.

**Exemple**

*Exemple 1.3*

*$u$ est l'application constante égale à $c$. Loi de $Y = u(X)$ ?*

**Exemple**

*Exemple 1.4*

*$u : t \longmapsto at + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Loi de $Y = u(X) = aX + b$ ?*

**Exemple**

*Exemple 1.4*

*$u : t \longmapsto t^2$. Loi de $Y = u(X) = X^2$ ?*

**Méthode**

*Obtenir la loi de $u(X)$*

*Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ et $Y = u(X)$ où $u$ est définie sur $X(\Omega)$.*
*Pour déterminer la loi de $u(X)$ :*

- *On exprime $F_Y$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(u(X) \leq x)$*
- *On détermine $I_x = \{t \in \mathbb{R}/u(t) \leq x\}$*
- *Alors $F_Y(x) = \mathbb{P}(X \in I_x) = \int_{I_x} f(t)dt$.*
- *On vérifie que la fonction obtenue est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre de points. Si c'est le cas on aura prouvé que $Y$ est une variable aléatoire à densité. On obtiendra une densité par dérivation.*

### 1.2.2 loi du minimum et du maximum de deux ou $n$ var indépendantes

**Méthode**

*Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires **indépendantes** de fonctions de répartition respectives $F_{X_1}$ et $F_{X_2}$.*

① *Soit $Y = max(X_1, X_2)$. On détermine $Y(\Omega)$ et sa fonction de répartition $F_Y$ en écrivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \mathbb{P}\left(max(X_1, X_2) \leq x\right) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x)$$

② *Soit $Z = min(X_1, X_2)$. On détermine $Z(\Omega)$ et sa fonction de répartition $F_Z$ en écrivant : $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}\left(min(X_1, X_2) \leq x\right) = 1 - \mathbb{P}((min(X_1, X_2) \geq x) = 1 - \mathbb{P}((X_1 \geq x) \cap (X_2 \geq x)) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x)) \cdot (1 - \mathbb{P}(X_2 \leq x)) = 1 - (1 - F_{X_1}(x)) \cdot (1 - F_{X_2}(x)) \end{aligned}$$

✐ **Remarque :** $Y$ et $Z$ sont des variables à densité, leur fonction de répartition étant continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

**Exemple**

*Exemple 1.5*

*Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition $F : x \longmapsto (1 - e^{-\lambda x})\boldsymbol{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ (on dira qu'elles suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda$). Déterminer la loi de $Y = min(X_1, X_2)$*

✐ **Remarque** : Cette démarche se généralise à la recherche de la loi du minimum et du maximum de $n$ variables aléatoires indépendantes.

**Exemple**

*Exemple 1.6*

*Soit $\{X_1, \cdots, X_n\}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de densité commune $f : x \longmapsto \dfrac{1}{a}\boldsymbol{1}_{[0,a]}$. Déterminer les lois de $U = max\{X_1, \cdots, X_n\}$ et de $V = min\{X_1, \cdots, X_n\}$.*

## 1.3 Espérance

**Définition**

*Définition 1.3. Espérance*

*Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument, on dit que $X$ admet une* `espérance mathématique` *ou* `espérance` *égale au réel*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

⚠ Dans ce cas particulier, **l'absolue convergence est équivalente à la convergence** puisque $t \longmapsto tf(t)$ est négative sur $\mathbb{R}_-$. On pourra donc se contenter de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

**Exemples**

*Exemples 1.7*

*Vérifier dans chaque cas que les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ sont des densités de probabilité. On considérera les variables aléatoires de densité $f$ et on étudiera l'existence d'une espérance qu'on explicitera en cas de convergence.*

① $f : x \longmapsto 6x(1-x)\boldsymbol{1}_{[0,1]}(x)$

② $f : x \longmapsto \dfrac{2}{t^3}\boldsymbol{1}_{[1,+\infty[}(x)$

③ $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$

**Propriété**

*prop. 1.5. Linéarité de l'espérance*

*Soient $X$ une variable aléatoire réelle admettant une densité $f$ et une espérance $\mathbb{E}(X)$, et $(a, b)$ un couple de réels. Alors $Y = aX + b$ admet une espérance vérifiant*

$$\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$$

**Propriété**

*prop. 1.6.*

*Soit $X$ variable aléatoire à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. Alors $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire à densité d'espérance nulle appelée* `variable aléatoire centrée associée à` $X$.

**Propriété**

*prop. 1.7*

*Soit $X$ est une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, possédant une espérance. Alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.*

**Théorèmes**

*Théorème de transfert*

*Soit $X$ variable aléatoire de densité $f$ et soit $u$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, telle que $X(\Omega) \subset I$.*
*Si $Y = u(X)$ est une variable aléatoire à densité, alors :*

$$\mathbb{E}(Y) \text{ existe si et seulement si } \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)f(t)dt \text{ converge absolument}$$

*Sous cette condition,* $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(u(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)f(t)dt$

**Exemple**

*Exemple 1.8*

*On considère à nouveau la variable aléatoire de densité $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{x^2+1}$. Que peut-on dire de $\mathbb{E}(\sin(X))$ ?*

**Propriété**

*prop. 1.8. Inégalité de Markov*

*Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$, à valeurs positives ($X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) et admettant une espérance. Alors :*

$$\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

## 1.4 Moments - Variance - écart-type

**Définition**

*Définition 1.4. Moments d'ordre $r$*

*Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle, sous réserve de convergence absolue de l'intégrale,* `moment d'ordre` $r$ `de` $X$ *le réel* $m_r(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$.

✐ **Remarque :** Le moment d'ordre 0 vaut 1 et le moment d'ordre 1 vaut $\mathbb{E}(X)$.

**Propriété**

*prop. 1.9.*

*Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$X \text{ admet un moment d'ordre } r \Leftrightarrow X^r \text{ admet une espérance.}$$

**Exemple**

*Exemple 1.9*

*Soit $X$ variable aléatoire de densité $f : x \longmapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Montrer que $m_{2r+1} = 0$ et $m_{2r} = (2r)!, \forall r \in \mathbb{N}$*

**Définition**

*Définition 1.5. Moments centrés d'ordre $r$*

*Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que $X$ admet un moment centré d'ordre $r$ si $m_r(X - \mathbb{E}(X))$ existe et on le note $\mu_r(X)$.*
*Autrement dit, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^r f(t)dt$ converge absolument, alors le* `moment centré d'ordre` $r$ `de` $X$ *existe et vaut le réel*

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^r f(t)dt$$

*Le moment centré d'ordre 2 est appelé* `variance de` $X$ *et se note $\mathbb{V}(X) = \mu_2(X)$.*
*Sa racine carrée $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ est appelée* `écart-type de` $X$ *et se note $\sigma(X)$.*

**Propriété**

*prop. 1.10. Formule de Koenig-Huygens*

*Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité $f$. La variable $X$ admet une variance si, et seulement si, $X$ admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

**Exemples**

*Exemples 1.10*

*On considère les variables aléatoires de densité $f$. Étudier l'existence d'une variance dans chacun des cas suivants :*

① $f : x \longmapsto 6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$

② $f : x \longmapsto \frac{2}{t^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$

**Exemples**

*Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant une variance. Alors :*

- ✦ *Si elle existe, la variance de $X$ est positive.*
- ✦ $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

✐ ***Remarque :*** Si $X$ est une variable aléatoire de support fini (c'est-à-dire : $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2 / X(\Omega)=[a,b]$) alors $X$ admet des moments et des moments centrés de tous les ordres.

**Définition**

*définition 1.6. variables aléatoires centrées et réduites*

- *Une variable aléatoire $X$ admettant une variance est dite* `réduite` *si $\mathbb{V}(X)=1$.*
- *Soit $X$ une variable aléatoire admettant une variance. On appelle* `variable centrée réduite associée à` $X$ *la variable notée $X^*$ et définie par*

$$X^* = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

**Propriété**

*Soit $X^*$ variable centrée réduite associée à $X$. Alors :*

$$\mathbb{E}(X^*) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(X^*) = 1$$

# 2 Lois usuelles

## 2.1 Loi uniforme

**Définition**

*définition 2.1. Loi uniforme*

*Soit $X$ variable aléatoire réelle et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.*
*On dit que $X$ suit la loi uniforme sur $[a,b]$ si elle admet pour densité la fonction $f$ définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$$

*En particulier, $X(\Omega)=[a,b]$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$*

✐ **Remarque :** La loi uniforme sur $[a,b]$ modélise le choix au hasard d'un réel entre $a$ et $b$ ; la fonction Python de « nombre au hasard » `random()` issue de la bibliothèque `random` permet de simuler la loi uniforme. Elle est fondamentale car à l'origine des simulations aussi bien des variables discrètes que des variables à densité.

**Exemples**

*Exemples 2.1*

*On choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1. Quelle est la probabilité que le carré de ce réel soit supérieur à $1/4$ ?*

**Théorèmes**

*Théorème 2.1. Fonction de répartition de la loi uniforme*

*La fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ est définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$

**Exemples**

*Exemples 2.2*

*Soit $X$ une variable aléatoire à densité admettant une fonction de répartition strictement croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, bijection de $I$ sur $]0, 1[$. Déterminer la loi de $Y = F_X(X)$.*

**Propriété**

*Proposition 2.1. Espérance et variance de la loi uniforme*

*Si $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, alors $X$ admet une espérance et une variance et :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2},\ \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## 2.2 Loi exponentielle

**Définition**

*définition 2.2. Loi exponentielle*

*Soit $X$ variable aléatoire réelle.*
*On dit que $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si elle admet pour densité la fonction $f$ définie par :*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$$

*En particulier, $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$*

**Théorèmes**

*Théorème 2.2. Fonction de répartition de la loi exponentielle*

*La fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ est définie par :*

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

**Propriété**

*Proposition 2.2. Espérance et variance de la loi exponentielle*

*Si $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ alors $X$ admet une espérance et une variance et*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda},\ \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Propriété**

*Proposition 2.3. Moments de la loi exponentielle*

*Si $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ alors $X$ admet des moments de tous les ordres et*

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \frac{r!}{\lambda^r}$$

**Propriété**

*Proposition 2.4. « Amnésie » de la loi exponentielle*

*Si $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ alors :*

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}_{(X \geq s)}(X \geq s+t) = \mathbb{P}(X \geq t)$$

✐ **Remarque de modélisation :** La loi exponentielle de paramètre $\lambda$ peut être simulée à partir d'une simulation de la loi uniforme. On montrera dans un premier temps que la restriction de $F_X$ à $\mathbb{R}_+^*$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$ puis on démontrera que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$ alors $F_X^{-1}(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

## 2.3 Loi normale

✐ ***Rappel*** : On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$

**Définition**

*définition 2.3. Loi normale*

*Soit $X$ variable aléatoire réelle et soient deux réels $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$*
*On dit que $X$ suit la loi normale de paramètres $m$ et $\sigma^2$ si elle admet pour densité la fonction $\varphi_{m,\sigma}$ définie par :*

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

*En particulier, $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$*

*Remarque* : On vérifiera que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,\sigma}(x) dx$ converge et vaut 1 à l'aide du changement de variable : $u = \dfrac{x-m}{\sigma}$.

***Notations :*** On note $\phi_{m,\sigma}$ la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

**Activité**

*Etudier les fonctions $\varphi_{m,\sigma}$ et $\phi_{m,\sigma}$ puis tracer leur représentation graphique.*

**Théorèmes**

*Théorème 2.3.*

*Soit $X$ une variable aléatoire réelle à densité. Alors :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

***Notations :*** On notera par la suite $\phi = \phi_{0,1}$ et $\varphi = \varphi_{0,1}$, fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ et } \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

✐ ***Remarque*** : On obtient les valeurs de la fonction de répartition $\phi$ et de sa réciproque (dite fonction des quantiles et notée $\alpha \longmapsto u_\alpha$) au moyen d'une calculatrice ou d'une bibliothèque associée à un langage de programmation.
En Python, on utilisera la bibliothèque `scipy.stats` au sein de laquelle on trouvera la fonction `norm` qui dispose de plusieurs méthodes permettant d'obtenir les valeurs de la densité de probabilité $\varphi$, de la fonction de répartition $\phi$ mais aussi de la fonction des quantiles.
En pratique :

```
from scipy.stats import norm
```

puis :

- `norm.pdf()` pour *Probability Density Function*
- `norm.cdf()` pour *Cumulative Density Function*
- `norm.ppf()` pour *Percent point function (inverse of cdf - percentiles).*

**Propriété**

*Proposition 2.5. Loi normale centrée réduite*

*Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors :*

① $\mathbb{E}(X) = 0$ *et* $\mathbb{V}(X) = 1$

② $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(-x) = 1 - \phi(x)$

③ $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\phi(x) - 1$ *et* $\mathbb{P}(|X| \geq x) = 2(1 - \phi(x))$

**Propriété**

*Proposition 2.6*

*Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$*

**Propriété**

*Proposition 2.7.*

*Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Alors :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma) \Leftrightarrow Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b, |a|\sigma)$$

# 3 Somme de v.a.d. indépendantes

## 3.1 Loi de la somme de deux variables indépendantes

**Théorèmes**

*Théorème 3.1. Loi d'une somme de 2 var indépendantes*

*Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives $f$ et $g$. Alors $S = X + Y$ est une variable aléatoire réelle de densité $h$ définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

*$h$ ainsi définie est appelée* `le produit de convolution` *de $f$ et de $g$*

**Exemples**

*Exemples 3.1*

*Déterminer la loi de $S = X + Y$ lorsque $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes deux la même loi :*

① *uniforme sur l'intervalle* $[0,1]$

② *exponentielle de paramètre* $\lambda$

## 3.2 Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes

**Théorèmes**

*Théorème 3.2. Somme de deux lois normales centrées indépendantes*

*On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes. Alors :*

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

**Théorèmes**

*Théorème 3.3. Somme de deux lois normales indépendantes*

*On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes. Alors :*

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

**Théorèmes**

*Généralisation au cas de $n$ lois normales indépendantes*

*On suppose que $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ est un ensemble de $n$ variables gaussiennes indépendantes de paramètres respectifs $m_i$ et $\sigma_i^2$. Alors :*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m, S) \text{ ou } m = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ et } S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$$

✐ ***En particulier :*** Si $X_1, \cdots, X_n$ sont $n$ variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes, alors :

$$\boxed{Z = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$$