CORRECTION D.S.05
Analyse et algèbre

Problème 1 : D'après Agro-Véto B 2010

I/ Fonction « gamma » d'Euler :

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Montrons que f_λ est une densité de probabilité :

a) f est continue sur $]-\infty, 0]$ car constante égale à 0 et sur $]0, +\infty[$ car $x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs $\underset{x\to 0}{lim} f_\lambda(x) = \lambda \neq f_\lambda(0) = 0$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

b) $\lambda > 0$ donc il est immédiat que $\boxed{f_\lambda \text{ est positive sur } \mathbb{R}}$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx$ par application de la relation de Chasles.
Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.
Donc $\underset{t\to+\infty}{lim} F(t) = 1$ car $\lambda > 0$. Soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\boxed{f_\lambda \text{ est une densité de probabilité}}$.

② a) Si $0 < \alpha < 1$ alors $\underset{t\to+\infty}{lim} t^{\alpha-1} = 0 = \underset{t\to+\infty}{lim} e^{-t/2}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$ et si $\alpha \geq 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$.
Quel que soit le cas de figure, il existe donc un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

D'autre part , $\forall t > 0, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} > 0$

$$\boxed{\text{il existe } A > 0 \text{ tel que } \forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1 \ (*)}$$

La fonction : $f : t \longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$
$\forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ s'obtient en multipliant $(*)$ par $e^{-t/2}$.
et $\int_A^{+\infty} e^{-t/2}dt$ est convergente (car $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente pour tout $a > 0$)
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives,

$$\boxed{\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}dt \text{ converge}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La limite est en général trouvée. Par contre l'encadrement est rarement justifié et le théorème sur les intégrales de fonctions positives rarement cité.*
On constate des confusions avec les suites : « à partir d'un certain rang ... »
Plusieurs candidats affirment que $\displaystyle\int_A^{+\infty} dx$ *converge.*
D'autres pensent que la fonction étant bornée, l'intégrale converge. Ou encore que la fonction ayant une limite nulle, l'intégrale converge... On peut lire aussi :

$$0 \leq f \leq g \text{ sur } [A, +\infty[\text{ donc } \int_A^\infty f(x)dx \leq \int_A^\infty g(x)dx$$

or $\int_A^\infty g(x)dx$ *converge donc* $\int_A^\infty f(x)dx$ *converge.* »

b) $\forall t \in]0, A], \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$

$\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ est convergente car, si on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^A t^{\alpha-1} = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_x^A$, soit $G(x) = \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha}$,

alors $\lim\limits_{x \to 0} G(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha} = \dfrac{A^\alpha}{\alpha}$ puisque $\alpha > 0$. Soit $\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge.
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

Lu dans le rapport de jury : « *Le problème de la borne* 0 *est très rarement perçu.* »

Et par application de la relation de Chasles, on peut conclure à l'aide des questions 2.a) et 2.b) que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \Gamma(\alpha) \text{ converge pour } \alpha > 0}$$

③ a) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (on reconnaît f_1 étudiée à la question 1)).

b) $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt$.

On pose : $\begin{cases} u(t) = t^\alpha & u'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ si $0 < \alpha < 1$ et sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 1$.

✐ On évitera de distinguer les cas en écrivant que pour tout $\alpha > 0$, u, v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to 0} u(t)v(t) = 0$ car $\alpha > 0$

On peut donc faire l'intégration par parties directement dans l'intégrale généralisée :
$\Gamma(\alpha + 1) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

✐ *Remarque :* Si on souhaite repasser par une intégrale définie de première année, il faut faire l'intégration par parties sur :

$$\int_x^y t^\alpha e^{-t}dt \text{ puis faire la limite quand } x \text{ tend vers 0 et } y \text{ tend vers } +\infty...$$

Lu dans le rapport de jury : « *Des intégrations par parties sont effectuées directement (sans précaution) sur des intégrales impropres* ».

c) Une récurrence s'impose :

– Pour $n = 1$, on a $\Gamma(n) = \Gamma(1) = 1 = 0!$ d'après 3.a)
– On suppose que $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour n fixé $(n \geq 1)$
– Alors, d'après la question précédente : $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!$.
– ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n - 1)!}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certaines notions élémentaires ne sont pas comprises. Ici, aucune « suite géométrique de raison n... »*
Rappelons que le résultat étant donné par l'énoncé, une justification « récurrence immédiate » ne peut suffire. »

④ a) pour $n=1$, on obtient immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{n,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda}{0!} x^0 e^{-\lambda x} = f_\lambda(x)$.

Conclusion : $\boxed{\varphi_{n,\lambda} = f_\lambda}$

b) $\varphi_{n,\lambda}$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx$
A l'aide du changement de variable $t = \lambda x$, $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n) = 1$

$$\boxed{\varphi_{n,\lambda} \text{ est une densité de probabilité}}$$

c) On étudie la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x\varphi_{n,\lambda}(x)|dx = \int_0^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$,
d'après la relation de Chasles et parce que $\varphi_{n,\lambda}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\int_0^{+\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx$ qui est une intégrale convergente.
Donc $\mathbb{E}(U)$ existe et vaut : $\frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx = \dfrac{n}{\lambda}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une espérance et } E(U) = \frac{n}{\lambda}}$$

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① *Précisons l'ensemble de continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y :*

- Si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $x-1 \geq 0$ et $y-1 \geq 0$. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est donc continue sur $[0,1]$.
- Si $0 < x < 1$ et $y \geq 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1]$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1]$.
- Si $x \geq 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$.
- Si $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.

✐ On retiendra que $B(x,y)$ est une intégrale définie pour tout $x, y > 0$ et une intégrale généralisée sinon.

② *Démontrons grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (on ne demande pas leur valeur).*

Il suffit de poser $u = 1-t = \varphi(t)$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et strictement décroissante.
Dès lors, $B(y,x) = \displaystyle\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$ est de même nature que :

$$\int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}(-du) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du = B(x,y)$$

Conclusion : $\boxed{B(y,x) \text{ et } B(x,y) \text{ sont de même nature et } B(y,x) = B(x,y) \text{ en cas de convergence}}$

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) *Calculons* $B(1,q)$ *:* $B(1,q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}dt = \left[-\dfrac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 = \dfrac{1^q}{q}$

$$\boxed{B(1,q) = \frac{1}{q}}$$

b) Pour $p \geq 2$, *calculons* $B(p,q)$ *en fonction de* p, q *et* $B(p-1,q+1)$ *:*

Menons une intégration par parties en notant que, puisque $p-1 \geq 1$ et $q \geq 1$, les intégrales $B(p,q)$ et $B(p-1,q+1)$ sont des intégrales définies.

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^{p-1} & u'(t) = (p-1)t^{p-2} \\ v'(t) = (1-t)^{q-1} & v(t) = -\dfrac{(1-t)^q}{q} \end{cases} \qquad u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]$$

$$B(p,q) = \left[-t^{p-1}\frac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 + \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)$$

$$\boxed{B(p,q) = \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)}$$

c) *En déduire que* $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *autrement dit :* $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$

Menons une récurrence sur p en posant : $\forall p \geq 1, H_p =$« $\forall q \geq 1, B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ »

Initialisation : H_1 est vrai d'après a)
Hérédité : Soit $p \geq 1$ tel que H_p est vrai
$B(p+1,q) = \dfrac{p}{q}B(p,q+1) = \dfrac{p}{q}\dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q)!} = \dfrac{(p+1-1)!(q-1)!}{(p+1+q-1)!}$ d'où H_{p+1} est vrai
Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p \geq 1, \forall q \geq 1, B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x, y réels strictement positifs.

a) *Montrons que pour tout* $x \in]0,1[$, $B(x,1-x)$ *est une intégrale généralisée convergente qui vaut* $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ *:*
Si $x \in]0,1[$, alors on a également $1-x \in]0,1[$. Donc, d'après la question II/1) nous savons que l'intégrale $B(x,1-x)$ est doublement généralisée.
Mais, si la relation $(*)$ reste vraie pour tous les réels x, y strictement positifs, elle est donc vraie pour $x > 0$ et $1-x > 0$.
Dès lors :

$$B(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$$

puisque $\Gamma(1) = 1$ d'après I/3)a.
Or on a vu dans la première partie du problème que $\Gamma(\alpha)$ converge pour tout $\alpha > 0$ donc $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1-x)$ convergent.
Conclusion : $\boxed{B(x,1-x) \text{ converge et vaut } \Gamma(x)\Gamma(1-x)}$

b) A l'aide de II/2) et en posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, *montrons que* $B(x, 1-x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}du$ *:*

On commence par noter que $B(x, 1-x) = B(1-x, x)$ en utilisant la question II/2).
Puis en suivant l'indication : $t = \dfrac{1}{1+u} \Leftrightarrow 1+u = \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{t} - 1 = \psi(t)$.
La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante.
Ce changement de variable ne change donc pas la nature de l'intégrale.
Pour préparer le changement de variable, on note par ailleurs que

$$1 - t = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} \text{ et } dt = -\frac{1}{(1+u)^2}du$$

Dès lors $B(1-x, x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}(1-t)^{x-1}dt$ qui converge d'après 4.a) est égale à :

$$J = \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{1+u}\right)^{-x} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(-\frac{du}{(1+u)^2}\right) \text{ avec } \alpha = \lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty \text{ et } \beta = \lim_{x\to 1}\psi(t) = 0$$

Soit

$$\boxed{B(1-x, x) = J = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}du}$$

c) *Calculons* $\Gamma(0.5)$ *en pensant au changement de variable :* $v = \sqrt{u}$ *:*
En prenant $x = 0.5$, puisque $1 - x = 0.5$, on obtient :

$$\Gamma^2(0.5) = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)\sqrt{u}}du$$

C'est alors qu'on utilise le changement de variable recommandé. La fonction $u \longmapsto \sqrt{u} = v$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante. Donc, puisqu'on est assuré de la convergence de $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et que ce changement de variable ne change pas sa nature, on a immédiatement :

$$\Gamma^2(0.5) = \int_0^\infty \frac{2vdv}{(1+v^2)v} = 2\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} = \pi$$

Conclusion : $\boxed{\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}}$

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

a) *Pour tout* $\alpha > 1$, *montrons en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que* $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha}dx$ *converge :*
Puisque $\alpha > 1$, si $x \geq 1$ alors $x^\alpha \geq x$ et donc $-x^\alpha \leq -x$.
Dès lors

$$\forall x \geq 1,\ e^{-x^\alpha} \leq e^{-x}$$

Or $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}dx$ converge puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}(1 - e^{-t})$ existe et vaut 1.
Dès lors, par application du théorème de convergence par comparaison des intégrales de fonctions positives : $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha}dx \text{ converge}}$.

On peut en déduire que $\boxed{I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha}dx \text{ converge}}$ par application de la relation de Chasles car la fonction $x \longmapsto e^{-x^\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$.

b) *A l'aide du changement de variable* $t = x^\alpha$, *montrons que :* $I_\alpha = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ *:*

Posons $\varphi(x) = x^\alpha = t$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante.
Par ailleurs : $t = x^\alpha \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{\alpha}}$ et donc

$$dx = \frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt \text{ et } \lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$$

Donc $I_\alpha = \int_0^\infty e^{-x^\alpha}dx$ est de même nature que :

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-t}dt$$

D'après la question précédente, ces deux intégrales sont convergentes. On peut donc conclure à leur égalité et conclure : $\boxed{I_\alpha = J_\alpha = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$

c) *Montrons qu'on peut en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss :*
Il suffit de prendre $\alpha = 2$ dans l'intégrale précédente.
Alors $I_2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
Or on a montré que 4.c) que $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$ donc $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Pour terminer, il suffit de noter que la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est paire.

Conclusion : $\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx \text{ converge et vaut } 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}}$

Problème 2 : G2E 2004

A tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on associe le polynôme $f(P)$: $f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$

Préliminaire :

1. *Montrons qu'il existe trois valeurs réelles distinctes de λ pour lesquelles le système (S_λ) ci-dessous n'est pas un système de Cramer.*

$$(S_\lambda)\begin{cases} x+y &= \lambda x \\ 2x+y+2z &= \lambda y \\ y+z &= \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x+y &= 0 \\ 2x+(1-\lambda)y+2z &= 0 \\ y+(1-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Nous choisissons d'écrire le système précédent sous la forme suivante :

$$(S_\lambda) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1\text{-}\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1\text{-}\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1\text{-}\lambda & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1\text{-}\lambda & 2 & 0 \\ 1\text{-}\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1\text{-}\lambda & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_2) \\ (L_1) \\ (L_3) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(S_\lambda) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1\text{-}\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-(1-\lambda)^2 & -2(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1 & 1\text{-}\lambda & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow 2L_2 - (1-\lambda)L_1) \\ (L_3) \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1\text{-}\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 2-(1-\lambda)^2 & -2(1-\lambda) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_3) \\ (L_2) \end{array} \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1\text{-}\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & P(\lambda) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - (-\lambda^2+2\lambda+1)L_2) \end{array}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= -2(1-\lambda) - (1-\lambda)(2-(1-\lambda)^2) \\
&= (\lambda-1)\left(2+2-(1-\lambda)^2\right) = (\lambda-1)(4-(1-\lambda)^2) \\
&= (\lambda-1)(2-1+\lambda)(2+1-\lambda) = (\lambda-1)(1+\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}$$

Le système (S) est un système de Cramer si et seulement si son rang vaut 3, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$

Conclusion : $\boxed{\text{Le système } (S_\lambda) \text{ n'est pas de Cramer pour } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1 \text{ et } \lambda_3 = 3}$

2. ☺ *Résolvons le système pour chaque valeur de λ_i, ($i = 1, 2$ ou 3) :*

➢ Premier cas : $\lambda_1 = -1$. D'après ce qui précède :

$$(S_{-1}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ y+2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -2z \\ x &= -y-z = z \end{cases}, z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } S_{-1} \text{ est } \{(z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}}$

➢ Second cas : $\lambda_2 = 1$. D'après ce qui précède :

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ z &= -x \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } S_1 \text{ est } \{(x,0,-x), x \in \mathbb{R}\}}$

➢ Troisième cas : $\lambda_1 = 3$. D'après ce qui précède :

$$(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z & = 0 \\ a_1 - 2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 2z \\ x & = y-z=z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } S_3 \text{ est } \{(z,2z,z), z \in \mathbb{R}\}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. *Montrons que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

 – On a $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
 – Le polynôme nul est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque son degré vaut $-\infty \leq n$.
 – $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\deg(\lambda P + Q) \leq max(\deg(\lambda P), Q)$.
 Or $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
 donc $\deg(\lambda P + Q) \leq max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$.
 On en déduit que $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$ qui est donc stable par combinaisons linéaires.

 Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$

 Par voie de conséquence $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$ puisque sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Partie I :

1. ☺ *Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que :*
$$f(P+Q) = f(P) + f(Q) \text{ et } f(\lambda P) = \lambda f(P)$$
 Par définition :
$$\begin{aligned} f(P+Q) &= (2X+1)(P+Q) - (X^2-1)(P+Q)' \\ &= (2X+1)P + (2X+1)Q - (X^2-1)(P'+Q') \text{ par propriété de la dérivée} \\ &= (2X+1)P + (2X+1)Q - (X^2-1)P' - (X^2-1)Q' \\ &= (2X+1)P - (X^2-1)P' + (2X+1)Q - (X^2-1)Q' = f(P) + f(Q) \end{aligned}$$
 De même :
$$\begin{aligned} f(\lambda P) &= (2X+1)(\lambda P) - (X^2-1)(\lambda P)' \\ &= \lambda(2X+1)P - (X^2-1)(\lambda P') \text{ par propriété de la dérivée} \\ &= \lambda[(2X+1)P - (X^2-1)P'] = \lambda f(P) \end{aligned}$$
 Conclusion : $\boxed{\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(P+Q) = f(P) + f(Q) \text{ et } f(\lambda P) = \lambda f(P)}$

 On peut dire que $\boxed{f \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}_n[X] \text{ dans } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. a) ☺ *Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrons que $f(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$:*

 $P \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \deg(P) \leq n \Rightarrow \deg\left((2X+1)P\right) \leq n+1$
 $P \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \deg(P') \leq n-1 \Rightarrow \deg\left((X^2-1)P'\right) \leq n+1$
 car le degré d'un produit de polynômes est égale à la somme de leurs degrés.
 On en déduit que : $\deg f(P) \leq n+1$ car le degré d'une somme de deux polynômes est inférieure

ou égale au maximum de leur degré respectifs.

Conclusion : $\boxed{P \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow f(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]}$

Supposons $\deg(P) = n$ et donnons une condition sur n pour que $\deg(f(P)) = n+1$
Posons : $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ avec $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $a_n \neq 0$.
Alors :

$$\begin{aligned} f(P) &= (2X+1)(a_0 + a_1X + ... + a_nX^n) - (X^2-1)(a_1 + 2a_2X + ... + na_nX^{n-1}) \\ &= 2a_nX^{n+1} - na_nX^{n+1} + R(X) \text{ où } \deg(R(X)) \leq n \\ &= (2-n)a_nX^{n+1} + R(X) \text{ où } R(X) \in \mathbb{R}_n[X] \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \deg(P) = n \text{ alors } \deg(f(P)) = n+1 \text{ si et seulement si } n \neq 2}$

b) *Montrons que $P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$:*
Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} f(P) &= (a_0 + a_1X + a_2X^2)(2X+1) - (X^2-1)(a_1 + 2a_2X) \\ &= 2a_0X + 2a_1X^2 + 2a_2X^3 + a_0 + a_1X + a_2X^2 - a_1X^2 - 2a_2X^3 + a_1 + 2a_2X \\ &= a_0 + a_1 + (2a_0 + a_1 + 2a_2)X + (a_1 + a_2)X^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_2[X] \text{ ou encore } f(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]}$

c) *Trouvons tous les polynômes P tels que $f(P) = 0$:*
D'après ce qui précède :

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 & = 0 \\ 2a_0 + a_1 + 2a_2 & = 0 \\ a_1 + a_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a_0, a_1, a_2) \text{ sont solution de } (S_0)$$

Or, d'après les préliminaires, pour $\lambda = 0$, le système (S_λ) est un système de Cramer. Il admet donc une solution unique qui, ici, est la solution nulle ($a_0 = 0 = a_1 = a_2$).

Conclusion : $\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0}$

d) On a déjà vu à la question 1) que f est une application linéaire. Sa restriction à $\mathbb{R}_2[X]$ est donc aussi une application linéaire.
Par ailleurs, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$ nous venons de voir à la question 2.b) que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Cela assure f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
Enfin, si on rappelle que, par définition $\text{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / f(P) = 0\}$ la question 2.c) prouve que $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et donc que f est une application linéaire injective.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme injectif}}$.

3. Déterminons les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$, non nuls, vérifiant $f(P) = \lambda P$:

a) Posons $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$.
$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow a_0 + a_1 + (2a_0 + a_1 + 2a_2)X + (a_1 + a_2)X^2 = \lambda(a_0 + a_1X + a_2X^2)$ en utilisant $f(P)$ obtenu à la question 2.b).
Or deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Donc :

$$\boxed{f(P) = \lambda P} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 & = \lambda a_0 \\ 2a_0 + a_1 + 2a_2 & = \lambda a_1 \\ a_1 + a_2 & = \lambda a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{(a_0, a_1, a_2) \text{ solution de } (S_\lambda)}$$

b) *Montrons qu'il existe trois valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe P non nul vérifiant $f(P) = \lambda P$:*
D'après la question précédente, il existe un tel polynôme P si il existe une solution non nul au système S_λ), autrement dit lorsque ce système n'est pas un système de Cramer.
D'après les préliminaires, (S_λ) n'est pas un système de Cramer pour $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } \lambda \in \{-3, -1, 1\}, \exists P \in \mathbb{R}_2[X], P \neq 0 / f(P) = \lambda P}$

c) *Pour chaque λ_i on demande une solution de la forme $(a_0, a_1, a_2) = (1, y_i, z_i)$.*
Reprenons les solutions obtenues dans chacun de ces 3 cas dans la question 2. des préliminaires.

- Pour $\lambda_1 = -1$, il suffit de prendre : $\boxed{(a_0, a_1, a_2) = (1, y_1, z_1) = (1, -2, 1)}$.
  On a alors $Q_1(X) = 1 - 2X + X^2$ qui doit vérifier $f(Q_1) = \lambda_1 Q_1$.
  Vérifions quand même *explicitement* : $f(Q_1) = 1 + (-2) + (2 - 2 + 2)X + (-2 + 1)X^2$ d'après le calcul de $f(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$ effectué en I.2.b)
  Autrement dit $f(Q_1) = -1 + 2X - X^2 = -Q_1$.

- Pour $\lambda_2 = 1$, on prend $\boxed{(a_0, a_1, a_2) = (1, y_2, z_2) = (1, 0, -1)}$.
  On a alors $Q_2(X) = 1 - X^2$ qui doit vérifier $f(Q_2) = \lambda_2 Q_2 = Q_2$.
  Vérifions *explicitement* : $f(Q_2) = 1 + 0 + (2 + 0 - 2)X + (0 - 1)X^2$ toujours d'après I.2.b)
  Autrement dit $f(Q_2) = 1 - X^2 = Q_2$.

- Pour $\lambda_3 = 3$, on prend $\boxed{(a_0, a_1, a_2) = (1, y_3, z_3) = (1, 2, 1)}$.
  On a alors $Q_3(X) = 1 + 2X + X^2$ qui doit vérifier $f(Q_3) = \lambda_3 Q_3 = 3Q_3$.
  Vérifions*explicitement* : $f(Q_3) = 1 + 2 + (2 + 2 + 2)X + (2 + 1)X^2$ d'après I.2.b)
  Autrement dit $f(Q_3) = 3 + 6X + 3X^2 = 3Q_3$.

Conclusion : $\boxed{f(Q_1) = -Q_1,\ f(Q_2) = Q_2 \text{ et } f(Q_3) = 3Q_3}$

Partie II :

1. *Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel $R_n = f^n(R_0)$:*
   Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $R_n = f^n(R_0)$ ».
   – Pour $n = 0$, on a $R_0 = id(R_0) = f^0(R_0)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   – Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n fixé, $n \geq 0$.
   – Hérédité : On a $f^{n+1}(R_0) = f[f^n(R_0)] = f(R_n) = R_{n+1}$ par hypothèse.
   – ***Conclusion*** : $\boxed{R_n = f^n(R_0), \forall n \in \mathbb{N}}$

2. *Exprimons $f^n(Q_0)$, $f^n(Q_1)$ et $f^n(Q_2)$ en fonction de n, Q_0, Q_1 et Q_2 :*
   On sait que $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $f(Q_i) = \lambda_i Q_i$ d'après la question 3.c)
   donc $f^2(Q_i) = f(\lambda_i Q_i) = \lambda_i f(Q_i)$ d'après la question I.1) (linéarité de l'application f)
   Soit $f^2(Q_i) = \lambda_i \cdot \lambda_i Q_i = \lambda_i^2 Q_i$.
   On suppose que $f^n(Q_i) = \lambda_i^n Q_i$ pour n fixé, $n \geq 1$.
   Alors
   $$f^{n+1}(Q_i) = f[f^n(Q_i)] = f(\lambda_i^n Q_i) = \lambda_i^n f(Q_i) = \lambda_i^n \cdot \lambda_i Q_i = \lambda_i^{n+1} Q_i$$
   Conclusion : $\boxed{f^n(Q_1) = (-1)^n Q_1,\ f^n(Q_2) = Q_2 \text{ et } f^n(Q_3) = 3^n Q_3}$

3. *Montrons que la famille $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$:*
   On revient à la définition :

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0$ (*)

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \lambda_1(1-2X+X^2) + \lambda_2(1-X^2) + \lambda_3(1+2X+X^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + (-2\lambda_1+2\lambda_3)X + (\lambda_1 - \lambda - 2 + \lambda_3)X^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = \lambda_3 \quad (L_2) \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \quad (L_1) \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \quad (L_3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la famille } \{Q_1, Q_2, Q_3\} \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}_2[X]}$

Montrons maintenant que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ *:*
$\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ et elle est composée de trois vecteurs alors que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
Conclusion : $\boxed{(Q_1, Q_2, Q_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$

4. $R_0 = 1 + X + X^2$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ donc il s'exprime de façon unique dans toute base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en particulier dans la base (Q_1, Q_2, Q_3) :
On cherche donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / 1 + X + X^2 = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3$ $(*)$

$$\begin{aligned}
(*) \Leftrightarrow 1 + X + X^2 &= \lambda_1(1-2X+X^2) + \lambda_2(1-X^2) + \lambda_3(1+2X+X^2) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_3) + (-2\lambda_1 + 2\lambda_3)X + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)X^2
\end{aligned}$$

Donc

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & = 1 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_3 & = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{-2} & 0 & 2 & 1 \\ 1 & \text{-1} & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & \text{-2} & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 & = 0 \\ 4\lambda_3 & = 3 \Leftrightarrow \lambda_3 = 3/4 \\ \lambda_1 & = 1 - \lambda_3 = 1/4 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{R_0 = 1 + X + X^2 = \frac{1}{4}Q_1 + \frac{3}{4}Q_3}$

5. Nous cherchons à en déduire une expression de R_n en fonction de n :
D'après la question II.1. on a :
$$R_n = f^n(R0) = f^n(\frac{1}{4}Q_1 + \frac{3}{4}Q_3) = \frac{1}{4}f^n(Q_1) + \frac{3}{4}f^n(Q_3) \text{ d'après II.5. et par linéarité de } f^n.$$
Donc, en rappelant le résultat de II.2., on obtient :
$$R_n = \frac{1}{4}(-1)^n Q_1 + \frac{3}{4}3^n Q_3$$
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \frac{(-1)^n}{4}Q_1 + \frac{3^{n+1}}{4}Q_3}$

Problème 3 : Agro-Véto, épreuve A, 2013

Lu dans le rapport de jury : *« Ce problème avait pour objet l'étude de la fonction sinus cardinal. La partie 1 portait notamment sur l'étude de ses variations et limites en vue d'obtenir l'allure de la courbe. La seconde partie traitait des dérivées successives de f, et visait en particulier à prouver le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f. Enfin la dernière partie avait pour but d'écrire les dérivées successives de f comme produits des fonctions sinus et cosinus par des polynômes à coefficients rationnels.*
Dans l'ensemble les premières questions de la première partie ont été traitées dans la plupart ds copies. Les questions suivantes ont mis en évidence le fait que la différence entre $\mathcal{C}^1$ et dérivable n'était pas acquise pour tout le monde. »

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et } f(0) = 1.$$

1. a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\,; \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Cette question est sans surprise et bien traitée dans la grande majorité des copies. On regrettera toutefois une certaine tendance à utiliser l'expression « comme composée de fonctions usuelles » comme une formule magique servant à répondre à toutes les questions dont le but est de prouver la continuité, la dérivabilité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction. Il n'était bien entendu pas question de l'utiliser ici, f étant un produit, soit un quotient de deux fonctiosn dont le dénominateur ne s'annule pas. »*

b) *La rédaction rapide :* Il suffit de donner un développement limité à l'ordre 1 de f en 0, ce qui est immédiat si on connaît le développement limité de la fonction sin :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2) = 1 + \circ(x)$$

on en déduit immédiatement que $\underset{x\to0}{lim} f(x) = 1 = f(0)$ donc elle est continue en 0.

Par ailleurs, f admet un D.L. à l'ordre 1 au voisinage de 0 donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$.

La rédaction « pédestre » : $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

On a : $f'(x) \underset{x\to0}{=} \dfrac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)}{x^2} = -\dfrac{x}{3} + o\left(x^2\right)$.
On en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\to0} f'(x) = 0$.

La fonction f est continue (car $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable (car $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\lim_{x\to0} f'(x) = 0$.
On en déduit, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$$

De plus, f' étant continue en 0 :

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Le début de cette question était sans difficulté pour les candidats maîtrisant les développements limités, mais on déplore tout de même trop de sommes d'équivalents. Par contre, le caractère $\mathcal{C}^1$ a posé de nombreux problèmes. Certains candidats l'ont prouvé « à la main » quand d'autres (relativement rares) ont pensé à utiliser le théorème de la limite de la dérivée (ou théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$). Notons que ce théorème possède des hypothèses relativement contraignantes qu'il est important de vérifier avant de l'utiliser. »*

c) i. La fonction g comme somme et produit de fonctions dérivables est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x).$$

On a donc en particulier sur $[0, \pi]$:

x	0		π
$-x$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$+$	0
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$
$g(x)$	0	$-$	

Or pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

Lu dans le rapport de jury : *« L'étude du signe de g et des variations de f sur $[0, \pi]$ est de niveau terminale, mais pose malgré tout des soucis à quelques candidats.*
L'étude complète des variations de f est bien moins souvent traitée rigoureusement, et a donné lieu à des erreurs parfois grossières, notamment au sujet d'une hypothétique périodicité de f. »

ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$: $x\cos(x) = \sin(x) \iff g(x) = 0$.

– Cas n impair :

x	$n\pi$		$(n+1)\pi$
$-x$		$-$	
$\sin(x)$	0	$-$	0
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$	$-n\pi$	$\nearrow$	$(n+1)\pi$

– Cas n pair :

x	$n\pi$		$(n+1)\pi$
$-x$		$-$	
$\sin(x)$	0	$+$	0
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$n\pi$	$\searrow$	$-(n+1)\pi$

D'après les tableaux de variation ci-dessus, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$. De plus :

– Cas n impair :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

d'où :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

– Cas n pair :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

d'où :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

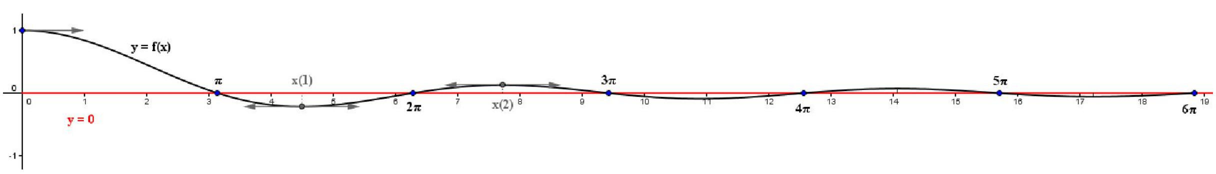
d) Pour tout $x > 0$, $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$. Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette limite est très classique et a sans aucun doute été traitée dans toutes les classes de métropole et d'outre-mer, mais 35% des candidats ne répondent pas correctement. Quant à l'interprétation en terme de représentaion graphique, elle n'est bien traitée que dans un tiers des copies.* »

$$\boxed{\text{La courbe représentative de } f \text{ admet donc en } +\infty\text{, une asymptote d'équation } y = 0.}$$

e)



Lu dans le rapport de jury : « *A peine un tiers des candidats récupèrent des points sur une courbe dont seule l'allure était demandée, et c'est dommage. Il est souhaitable que tous les éléments permettant de tracer la courbe (asymptote, tangentes, valeurs remarquables) figurent sur le dessin.* »

2. a) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$:
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. ***Conclusion*** : $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)}$.

b) Initialisation : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{0+1}} \int_0^x u^0 \cos^{(0)}(u)\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\int_0^x \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\left[\sin(u)\right]_{u=0}^{u=x} \\ &= \frac{1}{x}\left(\sin(x) - \sin(0)\right) = \frac{\sin(x)}{x} = f(x) = f^{(0)}(x)\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u$.

Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^{n+1} \cos^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$.

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $u \longmapsto u^n \cos^{(n)}(u)$ est continue sur $[0, x]$, donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée la fonction $x \longmapsto x^n \cos^{(n)}(x)$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = -\dfrac{n+1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{x^{n+1}} \times x^n \cos^{(n)}(x)$, d'où :
$f^{(n+1)}(x) = -\dfrac{n+1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{x}\cos^{(n)}(x)$.
De plus, les fonctions : $u \longmapsto u^{n+1}$ et $u \longmapsto \cos^{(n)}(u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, donc en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x u^{n+1} \cos^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u &= \left[u^{(n+1)} \cos^{(n)}(u)\right]_{u=0}^{u=x} - \int_0^x (n+1)u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x^{n+1}\cos^{(n)}(x) - (n+1)\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

On en déduit que :
$\dfrac{1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^{n+1} \cos^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\cos^{(n)}(x) - \dfrac{n+1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u = f^{(n+1)}(x)$.
La propriété est donc héréditaire à partir de $n = 0$;
Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ :\ f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La récurrence est généralement bien initialisé, et la dérivation de l'hypothèse de récurrence souvent juste, mais les candidats ayant vu et correctement posé l'intégration par parties sont beaucoup moins nombreux.* »

c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :
$\dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x^{n+1}}\cos^{(n)}(0)\left[\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right]_{u=0}^{u=x} = \dfrac{1}{x^{n+1}}\cos^{(n)}(0) \times \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ :\ \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Cette question ne présentait pas de difficulté particulière. »*

d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| &= \left|\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u\right| \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \left|\int_0^x u^n \left(\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right)\,\mathrm{d}u\right|\,,\ \text{car } x > 0.\end{aligned}$$

On en déduit que :
$\left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x \left|u^n \left(\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right)\right| \mathrm{d}u$ car $0 < x$, d'où :
$\left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \mathrm{d}u$, car $u \geq 0$ sur $[0, x]$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \mathrm{d}u.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« La linéarité de l'intégrale ne pose pas de problèmes, mais l'inégalité triangulaire en pose plus souvent, avec souvent un recours injustifié à l'inégalité triangulaire inversée. De plus, l'ordre des bornes, nécessaire pour appliquer l'inégalité triangulaire, n'est que rarement vérifié. »*

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\cos^{(n)}$ est dérivable (donc continue) sur $[0, u]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, u[$ tel que :

$$\cos^{(n+1)}(c) = \frac{\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)}{u - 0}.$$

Or : $\left|\cos^{(n)}(c)\right| \in \{|\cos(c)|, |\sin(c)|\}$, donc $\left|\cos^{(n)}(c)\right| \leq 1$, d'où : $\left|\frac{\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)}{u}\right| \leq 1$ et donc :
$\left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \leq |u|$. Or $u > 0$, donc : $\left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \leq u$.
Enfin, l'inégalité étant trivialement vraie pour $u = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall u \in \mathbb{R}_+\,,\ \left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \leq u.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Très peu de candidats ont pensé à appliquer le théorème des accroissements finis, et plus rarement encore sont ceux qui ont mené à terme la question. »*

f) On a donc pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \mathrm{d}u \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \times u\,\mathrm{d}u.$$

Or : $\displaystyle\int_0^x u^{n+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+2}}{n+2}\right]_{u=0}^{u=x} = \frac{x^{n+2}}{n+2}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{x}{n+2}.}$$

g) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+2} = 0$, d'où : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| = 0$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Une grosse moitié des candidats a vu le lien avec les questions précédentes, qu'elles aient été traitées ou non.* »

h) Nous avons démontré que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. On peut donc affirmer que la fonction $f^{(1)}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f^{(2)}(x) = \frac{\cos^{(2)}(0)}{3}$.

Donc, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, $f^{(1)}$ est dérivable en 0 avec $f^{(2)}(0) = \dfrac{\cos^{(2)}(0)}{3}$ et $f^{(2)}$ est continue en 0.

Enfin, pour tout $x \in [0,+\infty[$: $\cos^{(2)}(x) = (-\sin)'(x) = -\cos(x)$, donc : $\cos^{(2)}(0) = -1$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable en 0, avec } f^{(2)}(x) = -\frac{1}{3} \text{ et } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

On raisonne ensuite par récurrence. En particulier, l'hérédité se démontre de façon analogue à la question précédente en appliquant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ à la fonction $f^{(n)}$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f^{(n)}(0) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}.}$$