MATHEMATIQUES
Analyse et algèbre

Le sujet se compose de trois problèmes qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'**est pas** autorisé.*
Si au cours de l'épreuve, vous repèrez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-là sur la copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 : D'après Agro-Véto B 2010

λ désignera dans tout le problème un réel strictement positif.

On rappelle que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1, alors f est une densité de probabilité.

I/ Fonction « gamma » d'Euler :

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.
Montrer que f_λ est une densité de probabilité.

② Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

a) En utilisant $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}$, montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que, pour tout $t > A$,
$$0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$
En déduire que $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ et $\Gamma(\alpha)$ convergent pour tout $\alpha > 0$.

③ a) Calculer $\Gamma(1)$.
b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$

④ On considère la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ définie par : $\varphi_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

a) Reconnaître $\varphi_{1,\lambda}$.
b) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\varphi_{n,\lambda}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
c) Soit U une variable aléatoire ayant $\varphi_{n,\lambda}$ pour densité. On dira que U admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$ converge absolument et que, sous cette condition : $\mathbb{E}(U) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$.
Montrer que U admet une espérance et la calculer.

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① Préciser la continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur l'intervalle d'intégration $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y.

② Démontrer grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (*on ne demande pas leur valeur*).

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) Calculer $B(1,q)$.
b) Pour $p \geq 2$, calculer $B(p,q)$ en fonction de p, q et $B(p-1,q+1)$.
c) En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $\quad (*)$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x, y réels strictement positifs.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $B(x,1-x)$ est une intégrale généralisée convergente qui vaut $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$.
b) En posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, montrer par ailleurs que $B(x,1-x) = B(1-x,x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}du$.
c) Calculer $\Gamma(0.5)$ en pensant au changement de variable : $v = \sqrt{u}$.

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

a) Pour tout $\alpha > 1$, montrer en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha}dx$ converge.
En déduire que $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha}dx$ converge.
b) A l'aide du changement de variable $t = x^\alpha$, montrer que $I_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.
c) En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss.

Problème 2 : D'après G2E 2004

Préliminaires :

1. Montrer qu'il existe trois valeurs réelles distinctes de λ pour lesquelles le système (S_λ) ci-dessous n'admet pas une unique solution (On les notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec la convention $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.).
$$(S_\lambda)\begin{cases} x+y & = \lambda x \\ 2x+y+2z & = \lambda y \\ y+z & = \lambda z \end{cases}$$
2. Résoudre ce système pour chacune des valeurs de λ obtenues précédemment.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Partie I

A tout polynôme réel $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ on associe le polynôme noté $f(P)$ suivant :
$$f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

① Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que :
$$f(P+Q) = f(P) + f(Q) \text{ et } f(\lambda P) = \lambda f(P)$$
Que peut-on dire de l'application f ?

② a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que $f(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
En supposant ensuite que $\deg(P) = n$, pour quelles valeurs de n a-t-on $\deg(f(P)) = n+1$?
b) Montrer que $P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
c) Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $f(P) = 0$.
d) Justifier le fait que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
Bonus : Cet endomorphisme est-il injectif ?

③ On cherche à déterminer les polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, non nuls, vérifiant $f(P) = \lambda P$.
a) Montrer que $f(P) = \lambda P$ équivaut à montrer que (a_0, a_1, a_2) est solution du système (S_λ) défini dans les préliminaires.
b) En déduire qu'il existe trois valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe P non nul vérifiant $f(P) = \lambda P$;
c) Pour chacune des valeurs de λ_i, ($i = 1, 2$ ou 3), mettre en évidence une solution de la forme $(a_0, a_1, a_2) = (1, y_i, z_i)$ et un polynôme $Q_i = 1 + y_iX + z_iX^2$ tel que : $f(Q_i) = \lambda_i Q_i$. Vérifier explicitement cette égalité pour chacun de ces polynômes.

Partie II

On définit une suite de polynômes (R_n) par récurrence en donnant :
$$R_0 = 1 + X + X^2 \text{ et } R_{n+1} = f(R_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$
et on cherche la forme explicite du polynôme $R_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

① Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel $R_n = f^n(R_0)$.

② Exprimer $f^n(Q_0)$, $f^n(Q_1)$ et $f^n(Q_2)$ en fonction de n, Q_0, Q_1 et Q_2.

③ Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) où Q_1, Q_2 et Q_3 sont les polynômes obtenus à l'issue de la partie I est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

④ Exprimer R_0 dans la base (Q_1, Q_2, Q_3).

⑤ En déduire une expression de R_n en fonction de n.

Problème 3 : Agro-Véto, épreuve A, 2013

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et } f(0) = 1.$$

1. Représentation graphique de la fonction f.
   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Montrer que f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
   c) Afin d'étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$,
   nous introduisons la fonction $g : x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x)$.
      i. Etudier le signe de g sur $[0, \pi]$ puis les variations de f sur $[0, \pi]$.
      ii. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
      Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n) : x\cos(x) = \sin(x)$, $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ admet une unique solution x_n, et en déduire le signe de g sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ puis les variations de f sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ (*Une discussion sur la parité de n intervient*).
   d) Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser la nature de la branche infinie.
   e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 6\pi]$.
2. Etude des dérivées successives de f sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

✐ *Nous rappelons que pour tout entier naturel n, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f se note $f^{(n)}$.*

   b) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f^{(n)}(x) = \tfrac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u.$$
   c) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, calculer : $\dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u$.
   L'expression attendue dépend de $\cos^{(n)}(0)$ qu'on ne cherchera pas à évaluer.
   d) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, montrer que :
   $$\left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \left| \cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0) \right| \mathrm{d}u.$$
   e) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que :
   $$\forall u \in \mathbb{R}_+\,,\ \left| \cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0) \right| \leq u.$$
   f) En déduire que pour tout entier naturel n :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{x}{n+2}.$$
   g) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}$.
   h) Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et que : $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$, puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Généraliser ce résultat en montrant que pour tout entier naturel n, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$. *Nous avons donc montré que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.*